# Acustica
# Parte 5

Prof. Filippo Milotta
milotta@dmi.unict.it

# Il suono – Percezione umana

- Le onde sonore possono teoricamente avere *qualunque frequenza*.

- Tuttavia l'apparato uditivo umano percepisce solo suoni che abbiano una frequenza **compresa tra 20 Hz e 20 KHz.**

- Suoni di frequenza inferiore a 20 Hz sono chiamati **infrasuoni**, mentre suoni di frequenza superiore a 20 KHz sono chiamati **ultrasuoni**.

# Esercitazione Pratica (dal testo)

- <u>1.8.1 – Toni puri (Soglie di udibilità)</u>
  In un editor audio generare un'onda sinusoidale.
  - Selezionare più valori di frequenza e ampiezza e creare più tracce
  - Verificare frequenze interessanti, ad esempio:
    - 16 Hz
    - 20 Hz (soglia minima di udibilità)
    - 16 KHz
    - 20 KHz (soglia massima di udibilità)

# Il suono – Percezione umana

In che modo le grandezze fisiche che caratterizzano le onde (frequenza, ampiezza o l'intero spettro), influiscono sulla percezione del suono?

| Grandezza | Percezione |
|---|---|
| Frequenza | Suono acuto o grave |
| Ampiezza | Volume alto o basso |
| Spettro | Timbro o armonia del suono |

In realtà ogni grandezza influenza in misura minore le percezioni legate alle altre due grandezze.

# Frequenza dei suoni – Alti e bassi

La frequenza di un suono, al livello percettivo, determina la sensazione di acutezza o gravità dello stesso.

In particolare:

- un suono ad alta frequenza risulterà **acuto** o **alto**
- un suono a bassa frequenza risulterà **grave** o **basso**

La frequenza influenza in minima parte anche la **percezione** del **volume** o **intensità** del suono. Vedremo più avanti questo fenomeno. Per ora diciamo solo che ad esempio, le basse frequenze necessitano di più energia per essere udite.

# Frequenza dei suoni – Alti, medi, bassi

I suoni possono essere allora classificati come alti, medi o bassi. Tipicamente si considera lo schema:

| Intervallo frequenza | Tipo |
|---|---|
| 20 – 500 Hz | Bassi |
| 500 – 8000 Hz | Medi |
| 8000 – 20000 Hz | Alti |

La frequenza nella musica è strettamente legata alle **note musicali**. Infatti ad ogni nota corrisponde una precisa frequenza

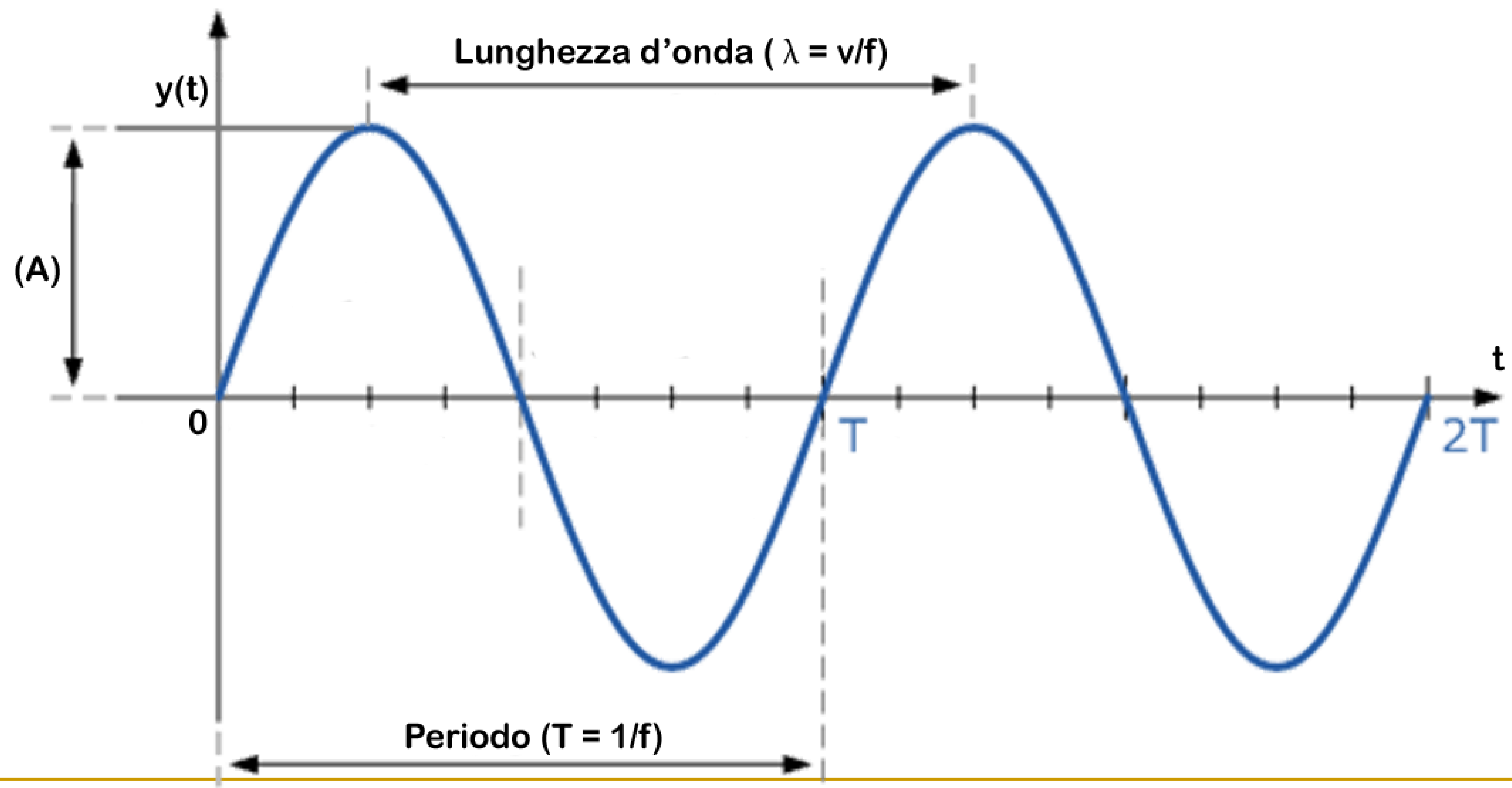
*L’individuazione di segnali semplici che compongono un segnale complesso*

# ANALISI DI FOURIER (ANALISI ARMONICA)

# Esempio – Onda sinusoidale

$$y(t) = A\sin(2\pi f t + \varphi_0)$$

Dove $A$ è la metà dell'ampiezza, $f$ la frequenza. In questo caso, il termine $2\pi f t + \varphi_0$ è la **fase**, mentre $\varphi_0$è la fase iniziale,



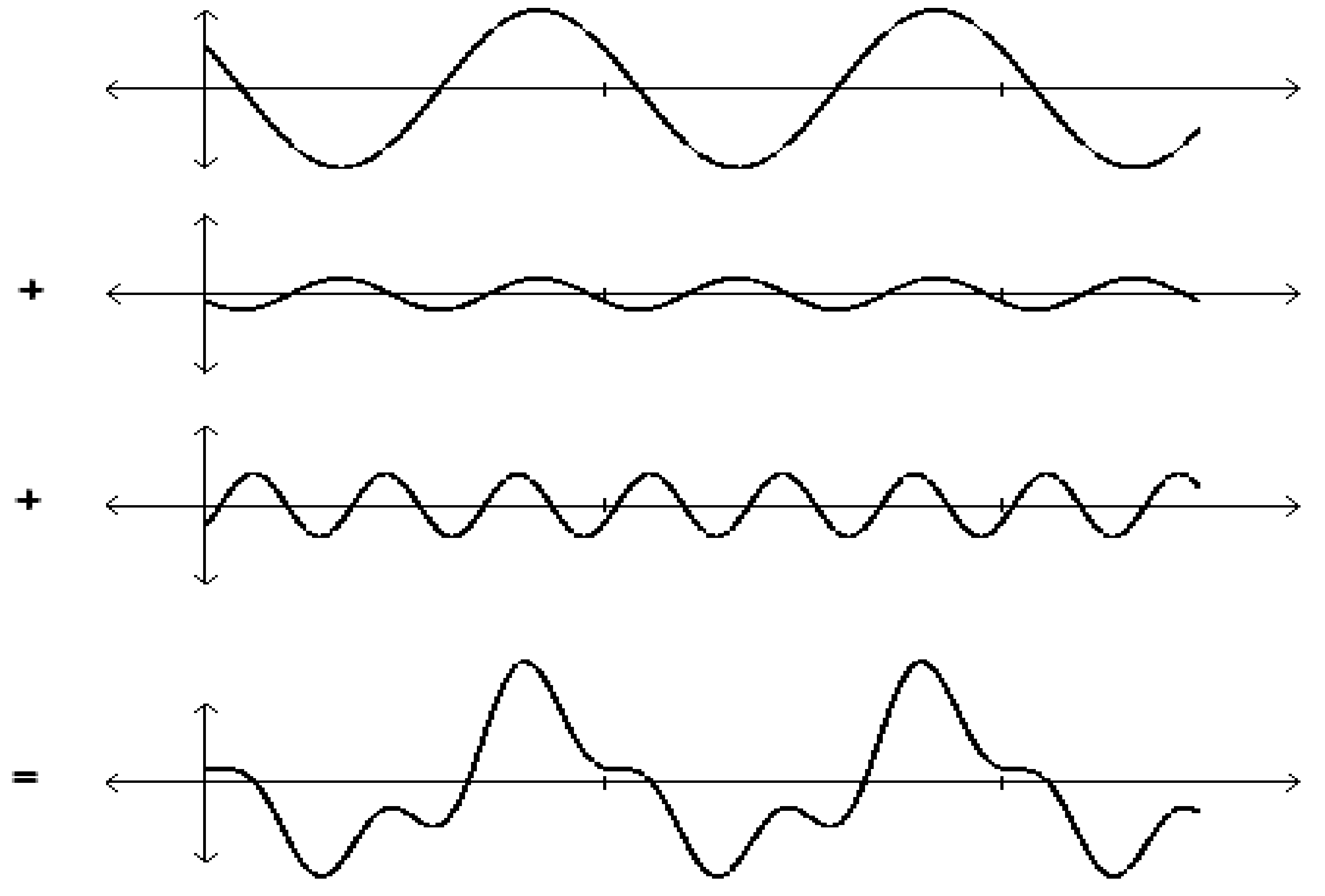
# Analisi armonica di Fourier

- Per studiare le onde è molto utile scriverle in forma matematica (es: sinusoide), cioè descriverle tramite una **funzione**.

- La maggior parte delle onde ha una forma generica difficile da descrivere.

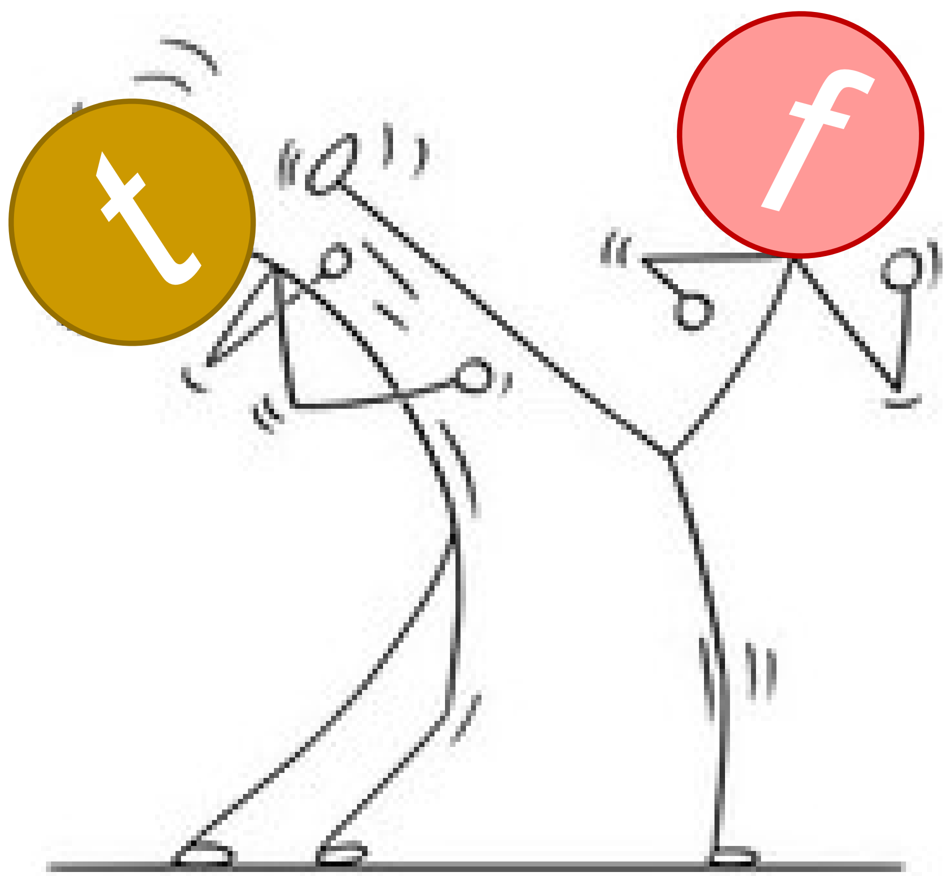
- **L'analisi armonica di Fourier** è uno strumento molto potente, poiché ci permette di descrivere onde complesse come somma di onde più semplici, in particolare onde sinusoidali e/o cosinusoidali.

# Teorema di Fourier – Idea

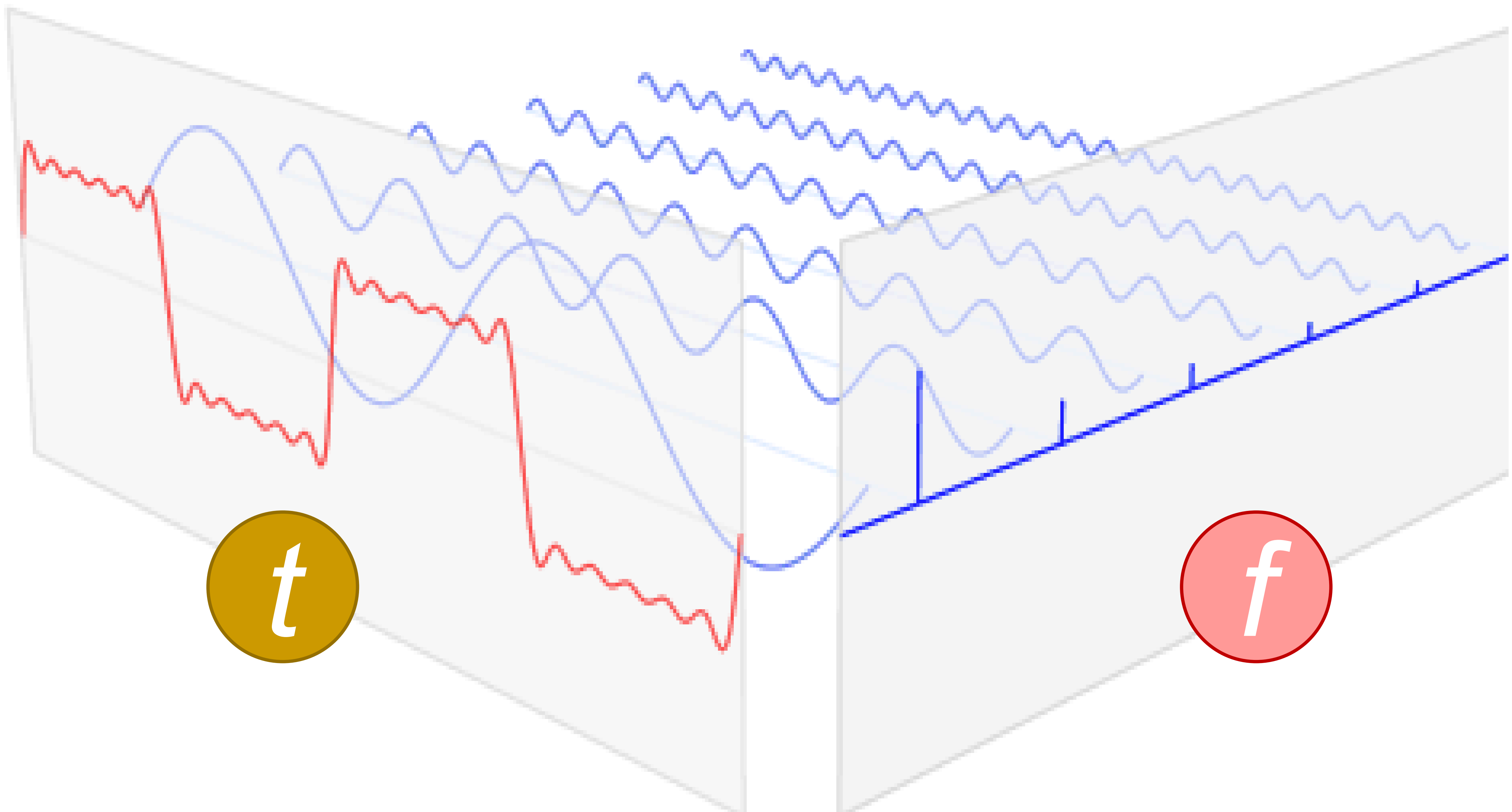



L'onda in basso può essere rappresentata come somma delle prime tre sinusoidi.

# Dominio del tempo
# VS Dominio delle frequenze



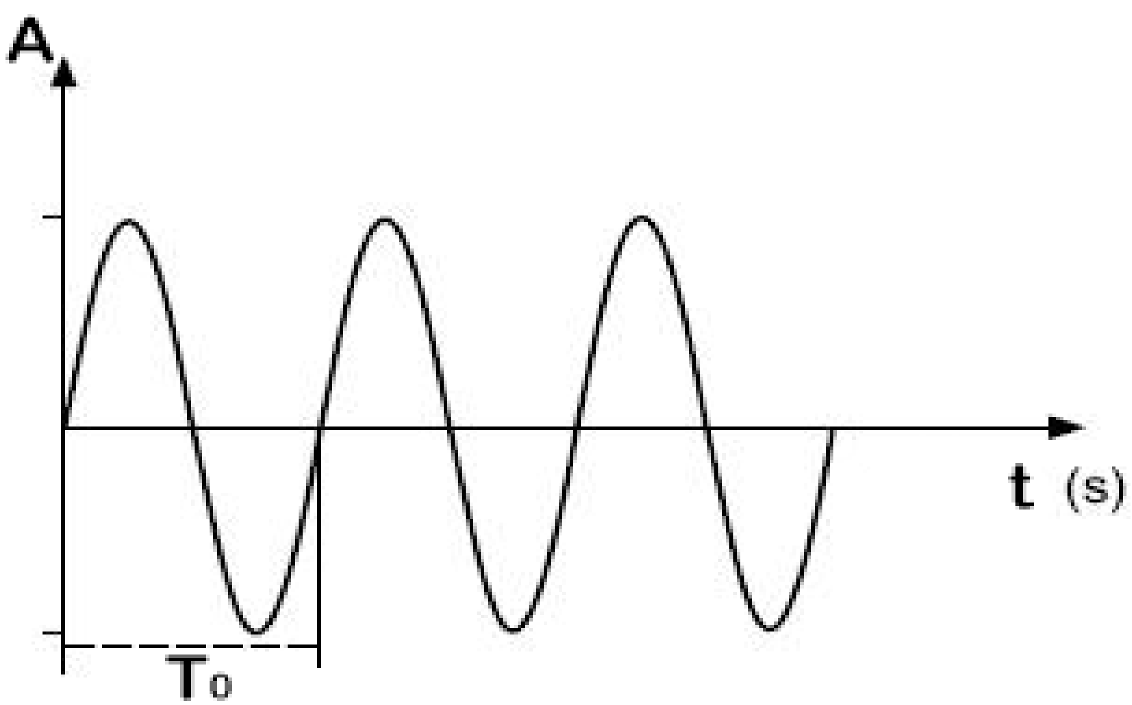
# Rappresentazione Frequenza-Tempo-Ampiezza



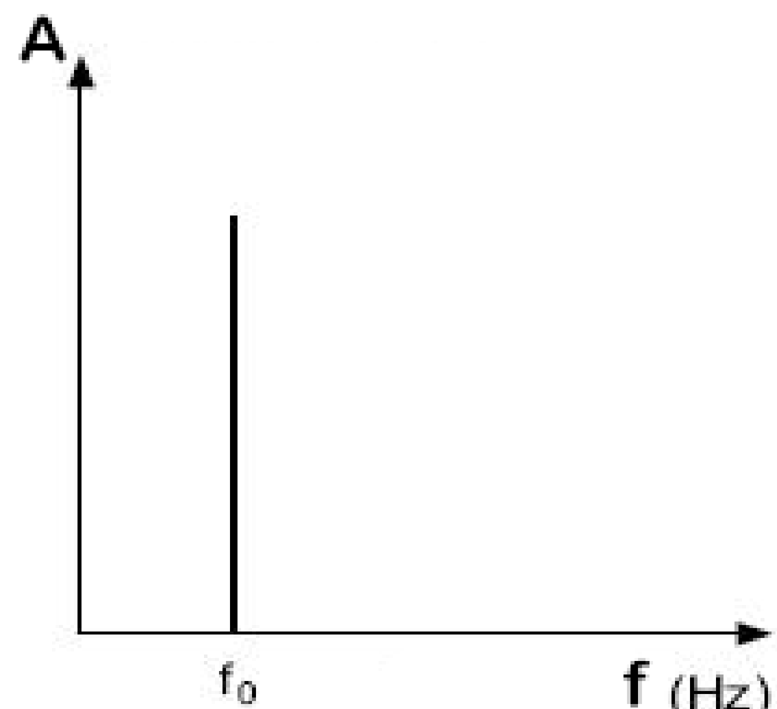
# Frequenza dei suoni – Tono puro

202021

I suoni composti da una singola onda sinusoidale si chiamano **toni (o suoni) puri**. Il loro <u>spettro</u> contiene una sola frequenza. Le **armoniche** di un tono puro, sono i toni puri con frequenza multipla.




Forma d'onda

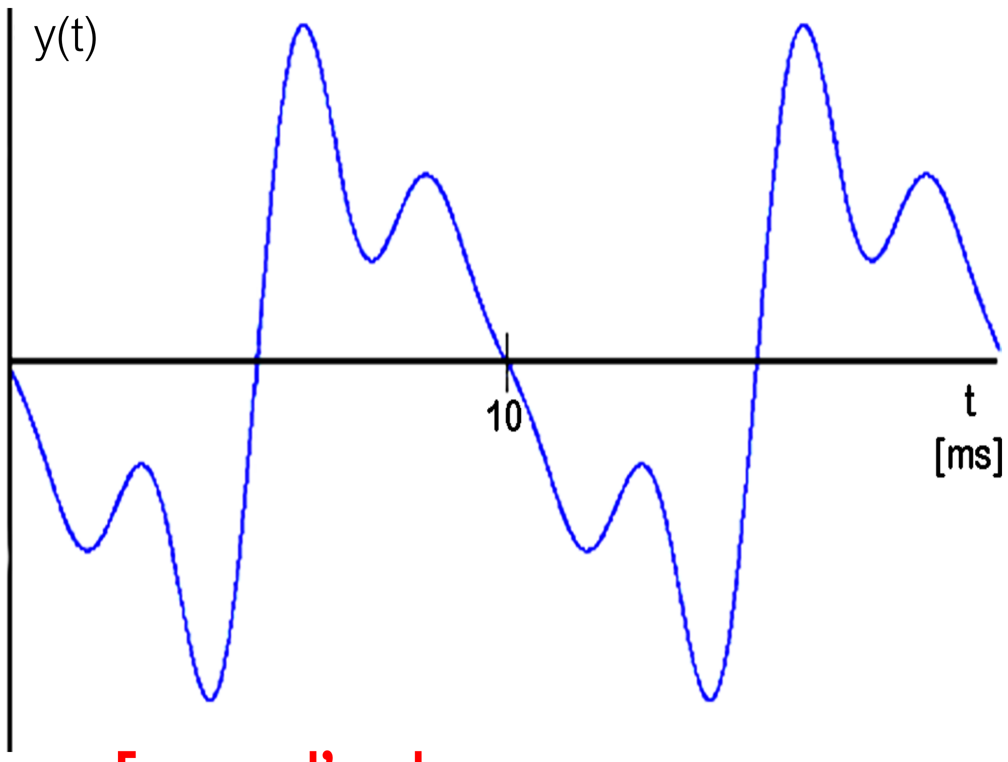



Spettro (discreto)

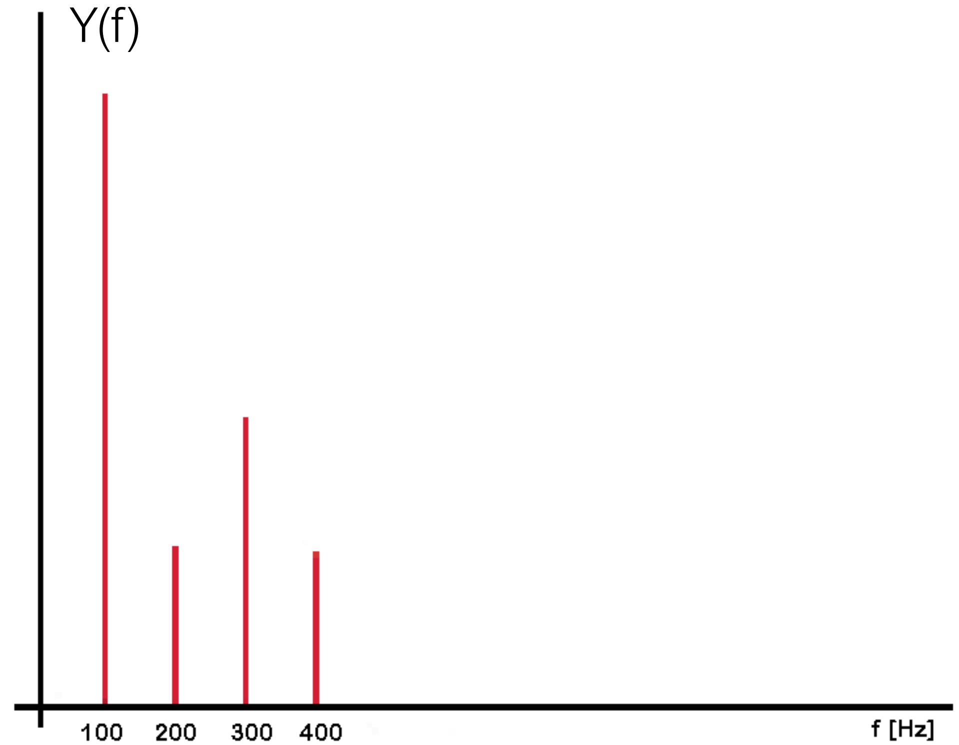
In natura i toni puri sono inesistenti. Possono essere prodotti in laboratorio o ottenuti in maniera abbastanza fedele con strumenti come il **diapason.** Ogni diapason viene costruito per emettere un solo tono puro!

# Frequenza dei suoni– Toni complessi

I suoni composti dalla somma di più toni puri (sinusoidi) prendono il nome di **toni (o suoni) complessi**. Il loro spettro contiene più di una frequenza.



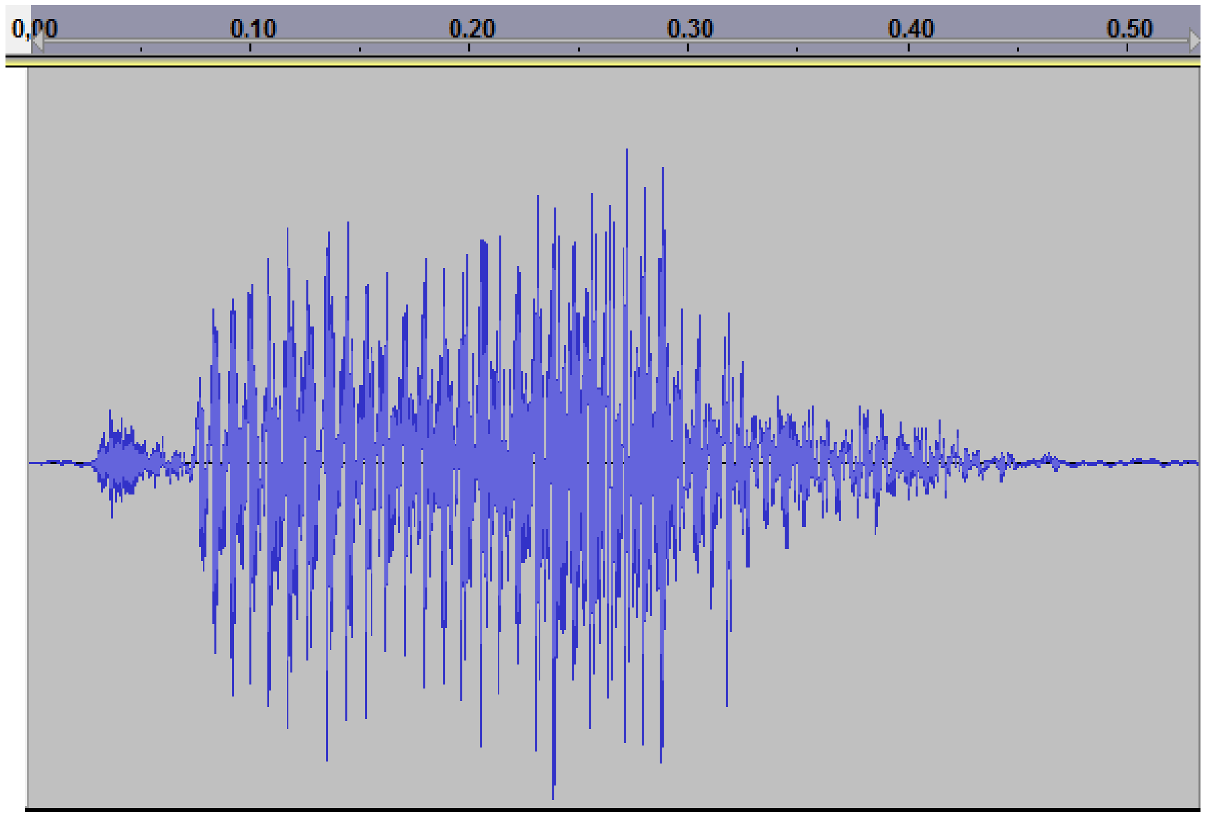

Forma d'onda



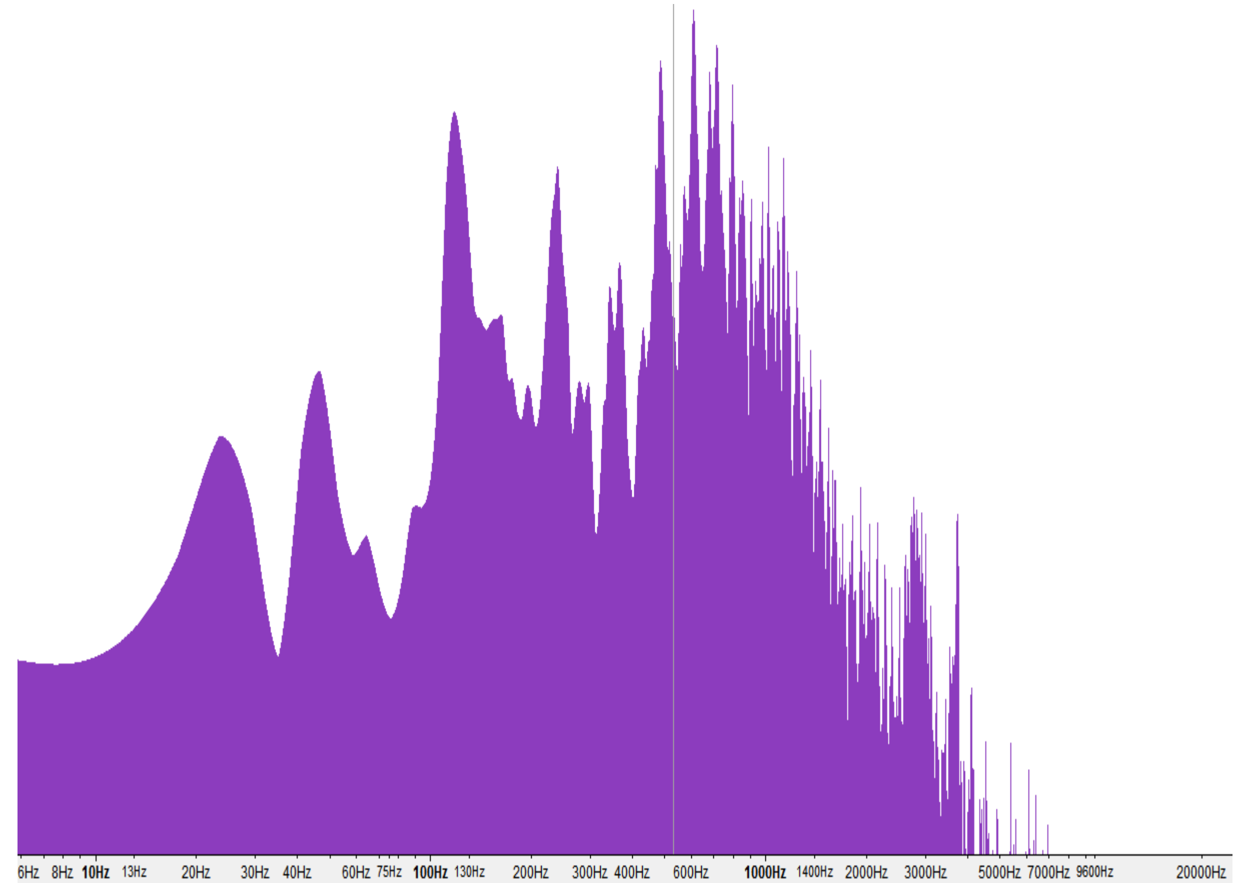

Spettro (discreto)

Praticamente tutti i suoni presenti in natura sono complessi.

# Frequenza dei suoni– Toni Complessi (Es.)



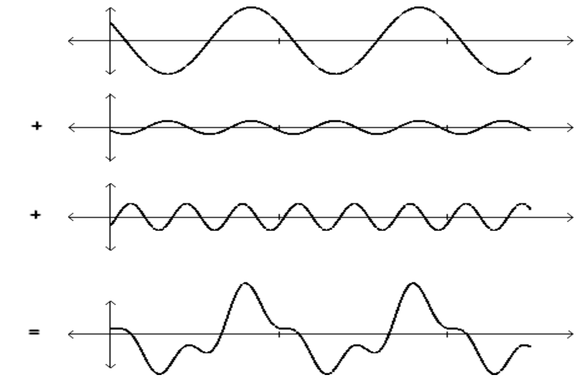

Forma d’onda




Spettro (continuo)

A destra la forma d’onda associata alla parola «ciao» pronunciata da un essere umano. A sinistra lo spettro dell’onda sonora. Si può notare l’enorme quantità di frequenze (sinusoidi) presenti.

# Esercitazione Pratica (dal testo)



- <u>1.8.3 – Teorema di Fourier: sintesi additiva</u>
  In un editor audio generare tre onde sinusoidali
  - 100 Hz, 200 Hz, 300 Hz, con ampiezza 0,3
  - Mixare le tre tracce
  - Verificare che la frequenza del segnale mixato coincida con quella del segnale a 100 Hz

# Esercitazione Pratica (dal testo)

- <u>1.8.4 – Teorema di Fourier: analisi spettro</u>
  In un editor audio utilizzare l’analisi dello spettro tramite l’analizzatore FFT (Fast Fourier Transform) sulla traccia ottenuta al termine dell’esercizio 1.8.3
  - Prestare attenzione a settare un valore ottimale per la dimensione della FFT (circa 16384)
  - Verificare i tre picchi in prossimità delle frequenze 100, 200 e 300 Hz

# Esercitazione Pratica (dal testo)

- <u>1.8.5 – Teorema di Fourier: spettro di fase</u>
  Ripetere l'esercizio 1.8.4 introducendo i seguenti cambi di fase
  - Per l'onda da 100 Hz : +90°
  - Per l'onda da 200 Hz : +180°
  - Per l'onda da 300 Hz : +270°
  - Nonostante il cambio di fase, calcolare FFT e verificare i tre picchi in prossimità delle frequenze 100, 200 e 300 Hz

# Joseph Fourier (1768 – 1830)

- Professore, poliziotto segreto, prigioniero politico, Governatore d'Egitto, Prefetto di Francia, amico e forte sostenitore di Napoleone Bonaparte
- Tutta la sua opera fu pionieristica, e oggi è considerato il padre dell'*analisi armonica*. Morì a Parigi a 62 anni, il 16 maggio del 1830, per un attacco cardiaco

# Teorema di Fourier

L'analisi armonica di Fourier si basa sull'omonimo teorema:

Qualunque funzione periodica, sotto opportune condizioni matematiche, di periodo $T_1$ o di **frequenza fondamentale** $f_1 = \frac{1}{T_1}$, può essere rappresentata mediante una somma di onde sinusoidali e/o cosinusoidali di opportuna ampiezza e di frequenza multipla della frequenza fondamentale.

Queste «condizioni matematiche» sono sempre verificate nei segnali **fisici**. Dunque tutte le onde periodiche che incontreremo potranno sempre essere trattate con l'analisi di Fourier.

# Condizioni di Dirichlet

Non tutte le funzioni periodiche possono essere scritte utilizzando lo sviluppo in **Serie di Fourier.** Affinché questo sia possibile una funzione ***f*** deve soddisfare le <u>condizioni di Dirichlet</u>:

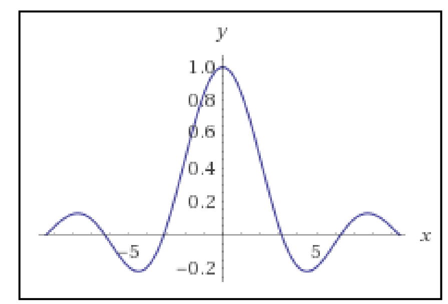
*1)* $f$ deve essere **assolutamente integrabile** in un intervallo pari al periodo;

*2)* $f$ deve avere un **numero finito di estremi** in un qualunque intervallo limitato;

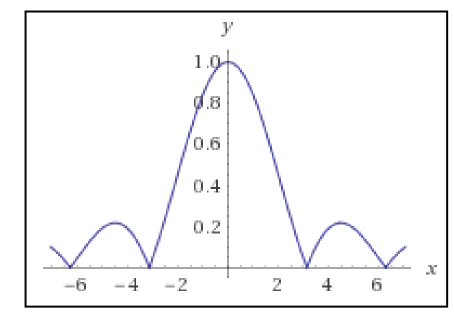
*3)* $f$ deve essere continua o avere al massimo un **numero finito di punti di discontinuità di prima specie** in un qualunque intervallo limitato (continuità a tratti);

Caso 1

$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

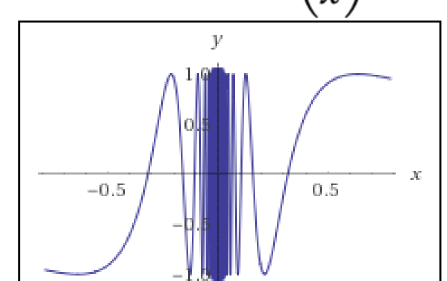



$|f(x)| = \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$

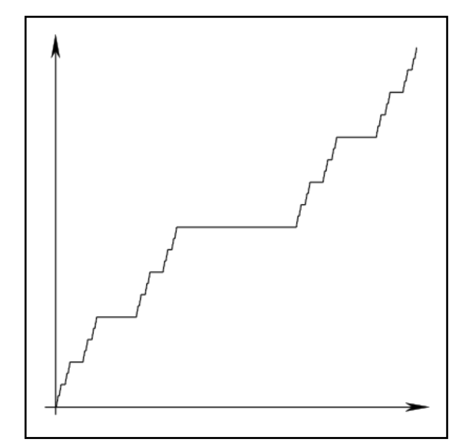



Caso 2

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$




Caso 3 – Funzione di Cantor



# Serie e Trasformata di Fourier

- Lo strumento matematico per trovare i termini elementari che costituiscono un'onda periodica è la **Serie di Fourier**

- Nella maggior parte dei casi le onde non sono periodiche, ma si può comunque agire usando la **Trasformata di Fourier**. In questo caso le frequenze delle onde elementari non apparterranno all'insieme discreto dei multipli della **frequenza fondamentale,** ma varieranno in un insieme continuo.

# Serie di Fourier

Sia $y(t)$ una funzione periodica di periodo $T$ che soddisfi le condizioni di Dirichlet, allora essa può sempre essere scritta come:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t) + b_n \sin(n\frac{2\pi}{T}t)$$

Dove:

- $n$ è un numero naturale e $\frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \omega$;
- l'espressione $a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ si chiama ***n*-esima armonica;**
- I termini $a_n$ e $b_n$ sono i **coefficienti** dell' $n$-esima armonica;
- L'armonica ottenuta per $n = 1$ si chiama **armonica fondamentale** ed ha frequenza pari a quella dell'onda

# Serie di Fourier - Sinusoide

In realtà ogni armonica può essere scritta usando una sola funzione tra seno e coseno. Si dimostra cioè che:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{a_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t) + b_n \sin(n\frac{2\pi}{T}t)} \longrightarrow A\ sin(\omega t + \varphi_0) = a\, cos\, \omega t + b\, sin\, \omega t$$

DIM.

$$\boxed{sin(a+b) = sin(a)cos(b) + sin(b)cos(a)}$$

I. Applicando la formula di addizione del seno:

$$A\, sin(\omega t + \varphi_0) = A\ \ sin\, \omega t\, cos\, \varphi_0 + A\, sin\, \varphi_0\, cos\, \omega t$$

II. Ponendo $A\, cos\, \varphi_0 = b$ e $A\, sin\, \varphi_0 = a$ si conclude.

Analogo ragionamento vale per la funzione $A\, cos(\omega t + \varphi_0)$

# Serie di Fourier – Ampiezza armonica $n$

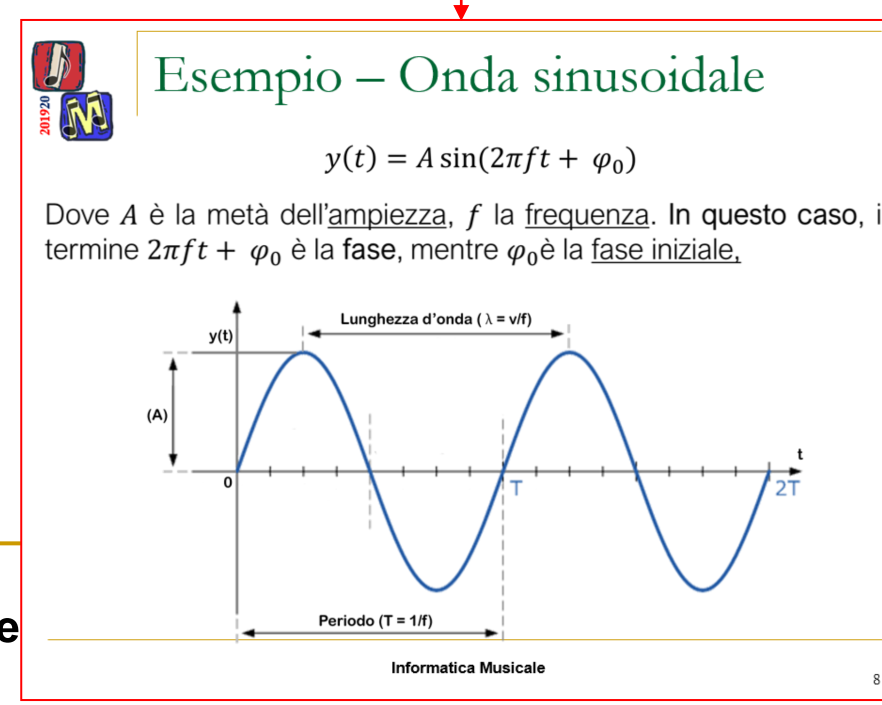
In generale si può dunque affermare che:

$$\boxed{A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)} = a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

*Vi ricorda qualcosa?*

Il valore $A_n$ è allora l'ampiezza dell' $\boldsymbol{n}$-esima armonica. Si può dimostrare

$$A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$$



# Serie di Fourier - Coefficienti

Gli unici valori non noti sono i coefficienti, descritti dai seguenti integrali in $t$ che dipendono dalla funzione iniziale $y(t)$.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)\ \cos(n\omega t)\ dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)\ dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) \sin(n\omega t)\ dt$$

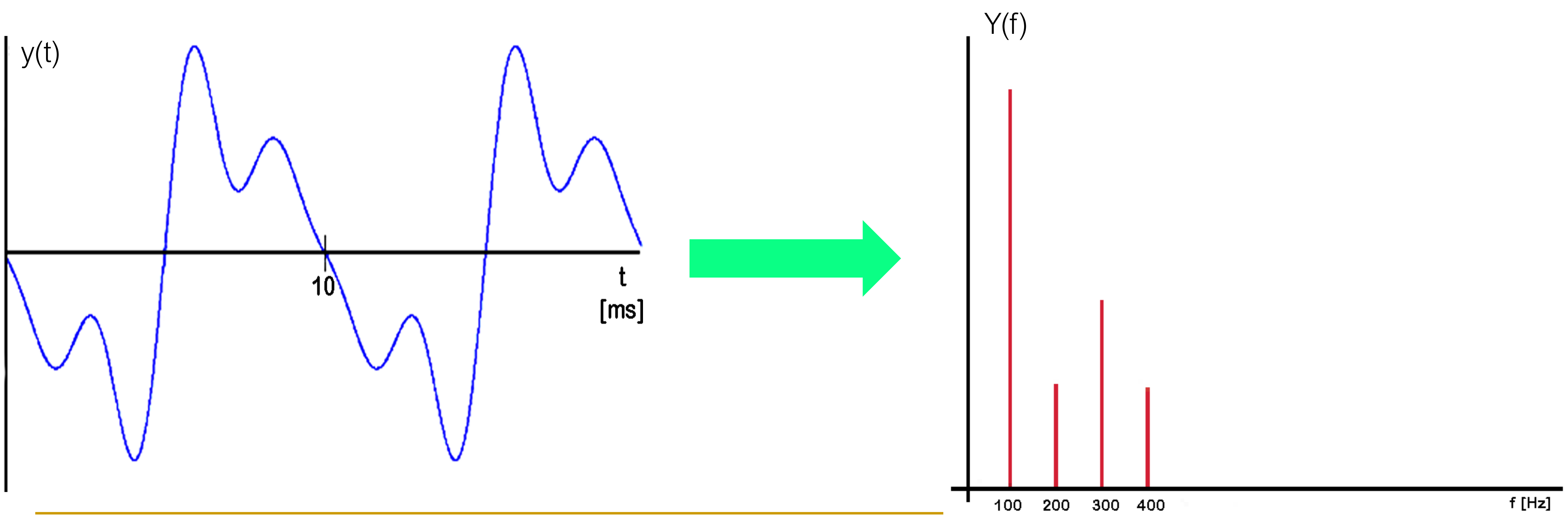
$$\boxed{\frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \omega}$$

# Serie di Fourier - Spettro

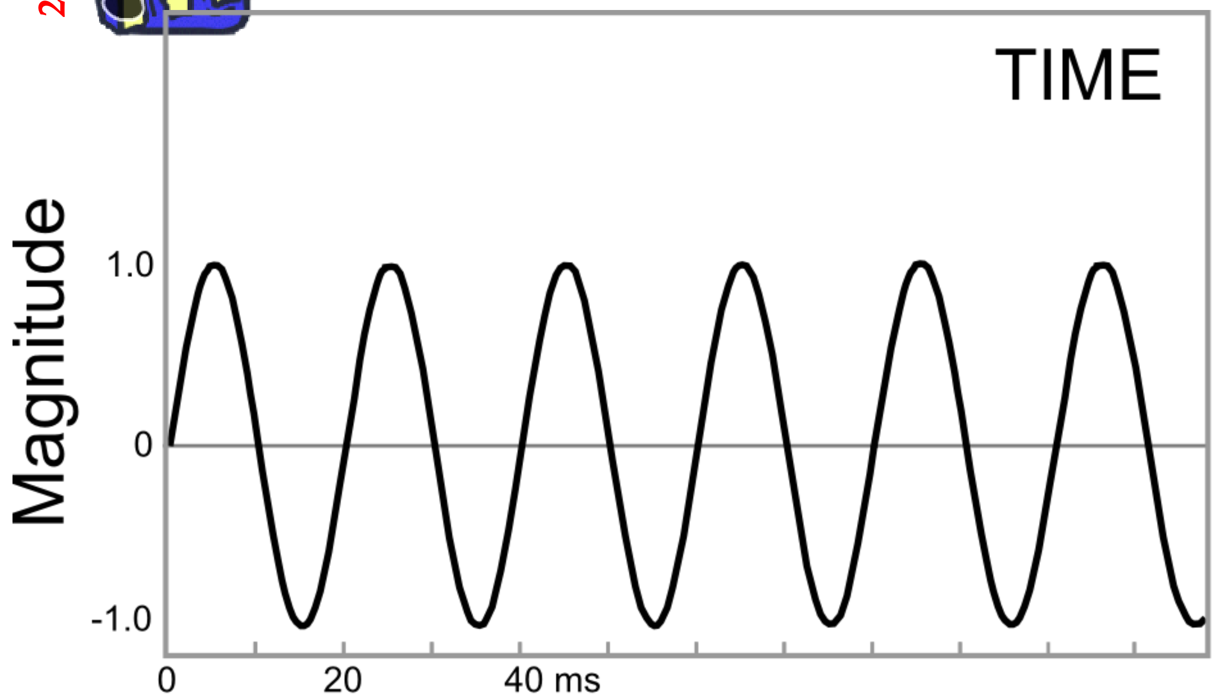
*Riformuliamo:*

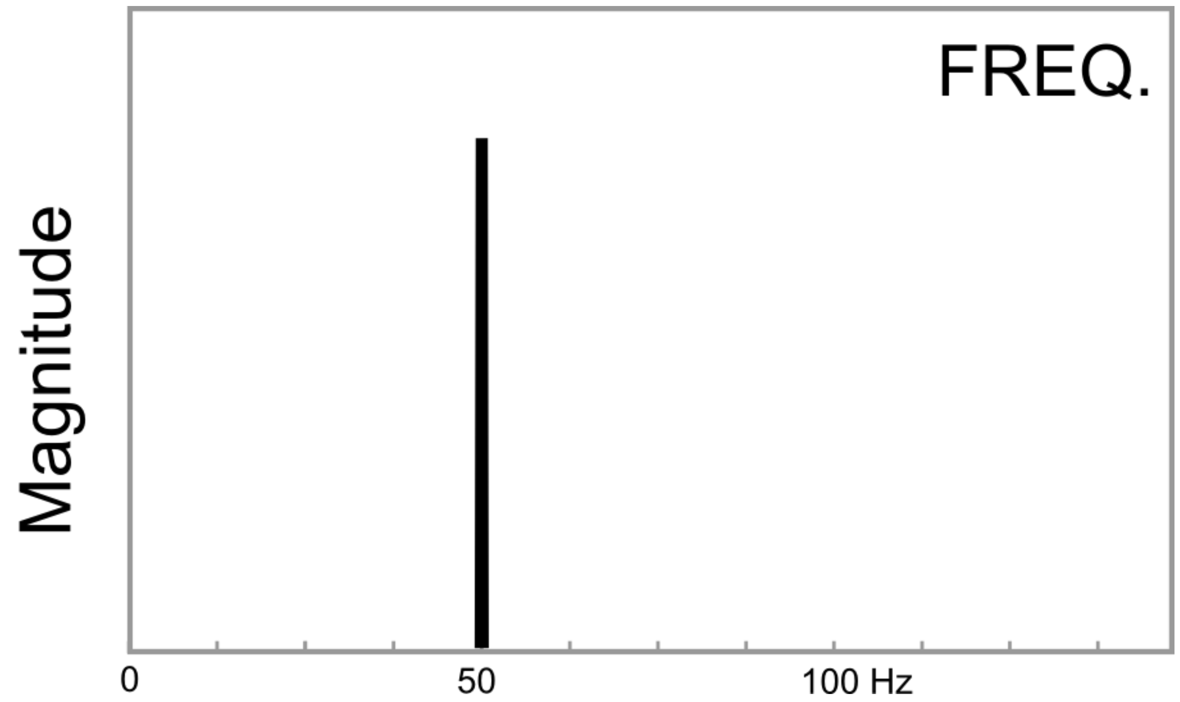
L'insieme delle frequenze delle onde elementari, con relativi contributi ($A_n$), che costituisce un'onda complessa prende il nome di **spettro**. Può essere indicato con $Y(f)$.

Lo spettro può essere rappresentato in un grafico **frequenza-ampiezza.** Si passa quindi dal **dominio del tempo** a quello **delle frequenze**



# Esempi – Spettro onda sinusoidale



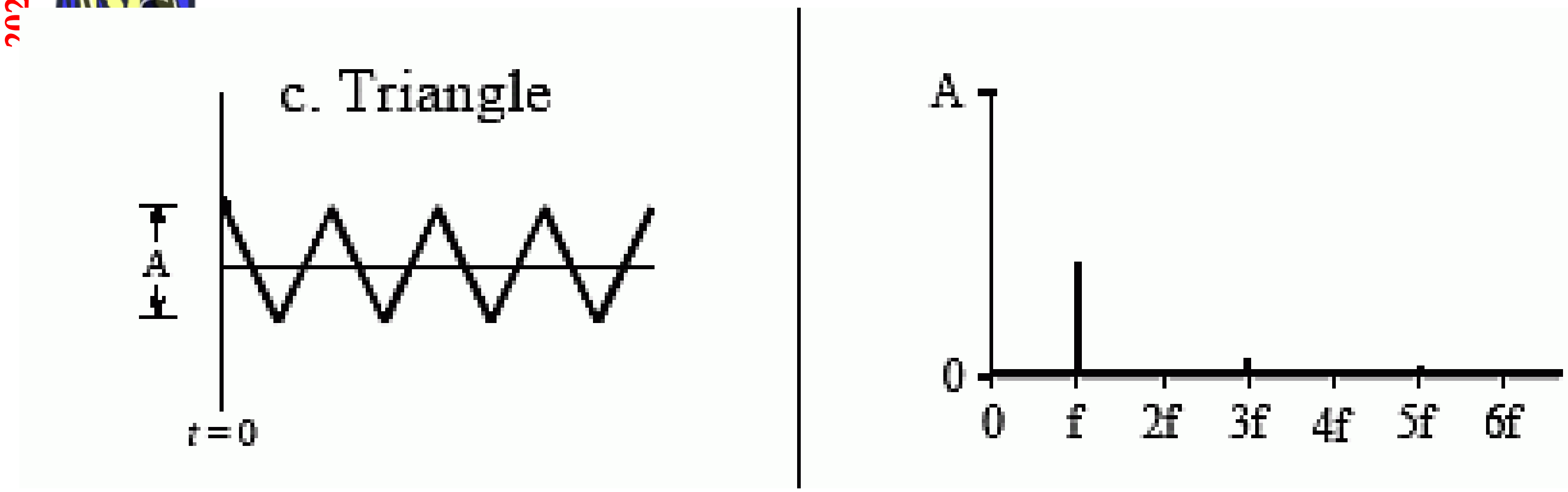




$$y(t) = sin(2\pi * 50 * t)$$

$$Y(f) = \begin{cases} 1, & f = 50 \\ 0, & altrimenti \end{cases}$$

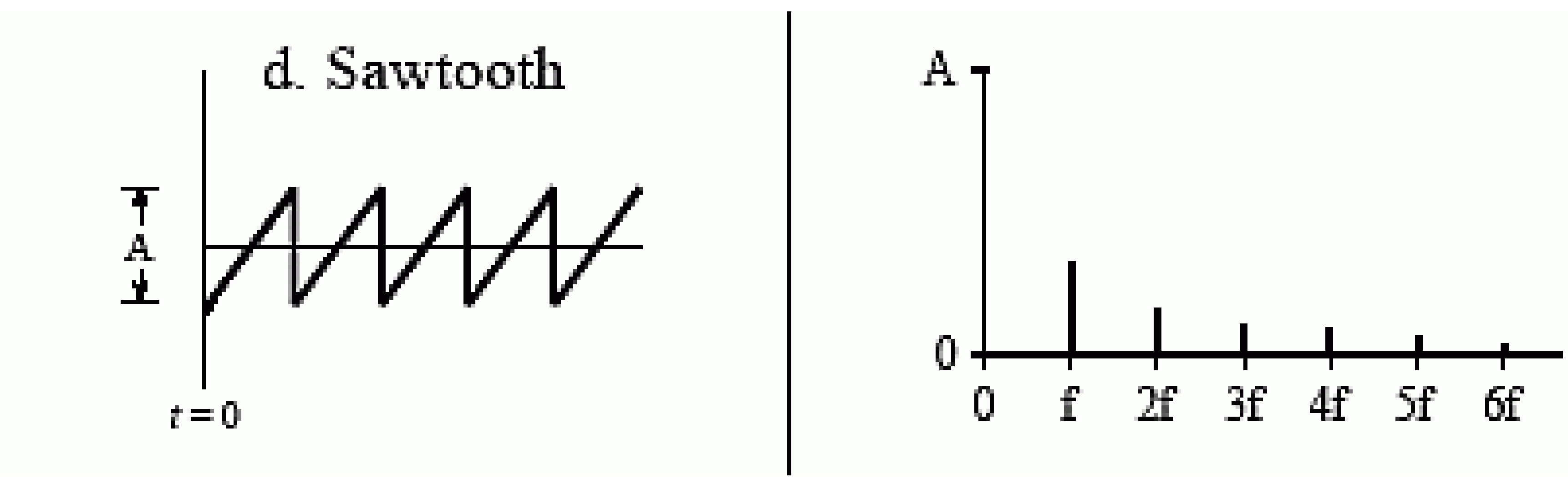
Onda sinusoidale di periodo $20\,ms$ e quindi di frequenza $50\,Hz$. Lo spettro è chiaramente composto dalla sola frequenza dell'unica sinusoide che costituisce l'onda

# Esempi – Triangolare e Dente di sega




$$a_0 = 0$$
$$a_n = \frac{4A}{(n\pi)^2}$$
$$b_n = 0$$

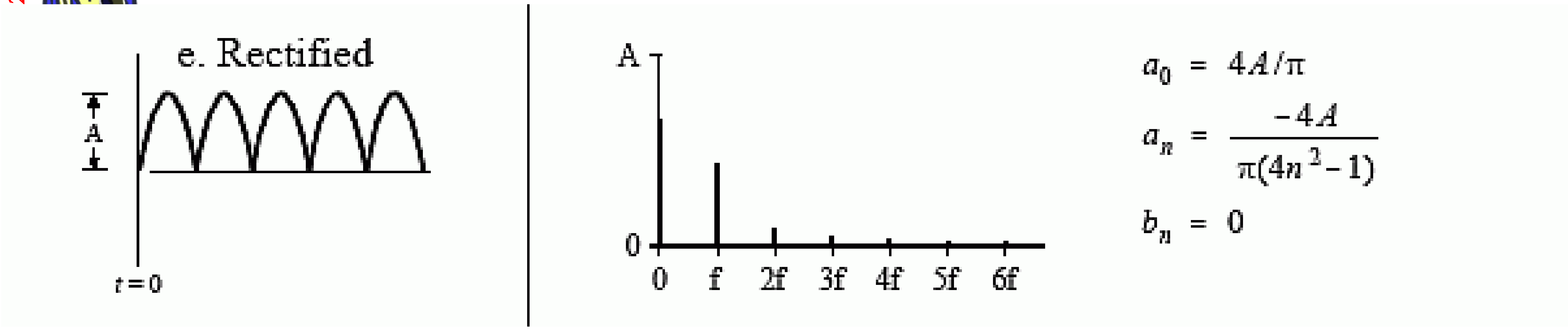
(all even harmonics are zero)

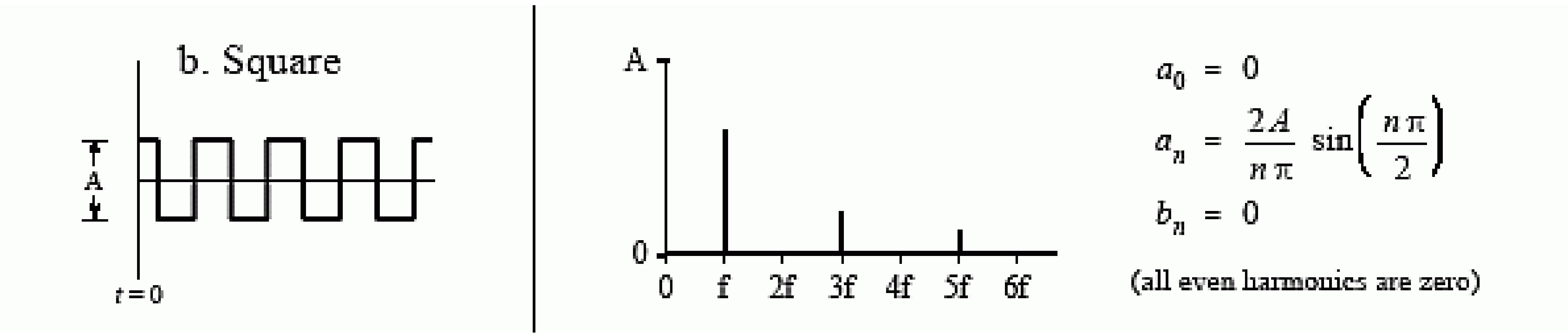



$$a_0 = 0$$
$$a_n = 0$$
$$b_n = \frac{-A}{n\pi}$$

L'onda **triangolare** e a **dente di sega** richiede infiniti termini per essere sintetizzata. Al livello digitale ciò è chiaramente impossibile, per cui di norma si usano solo i primi termini per approssimare l'onda originale.

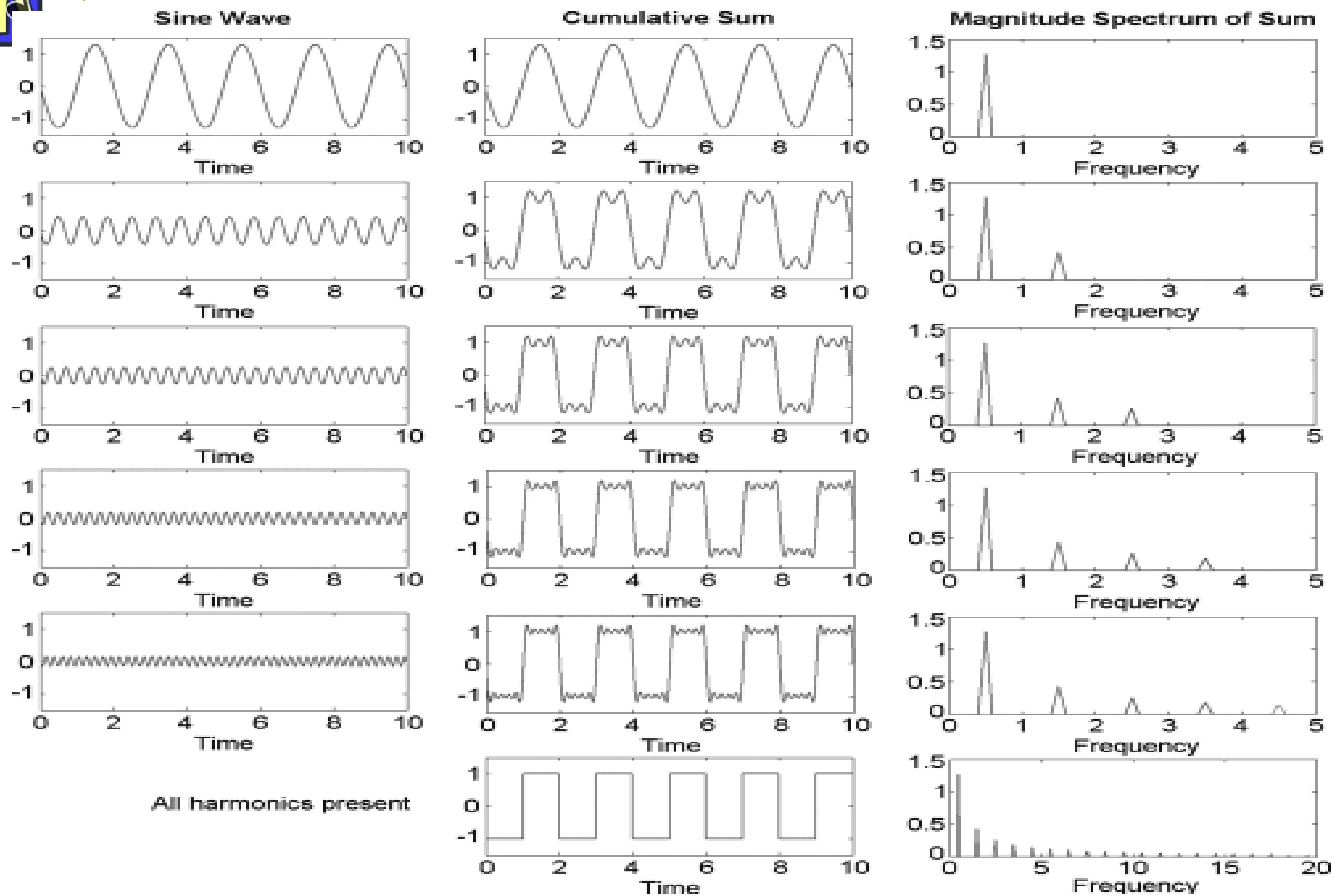
# Esempi – Raddrizzata e Quadra



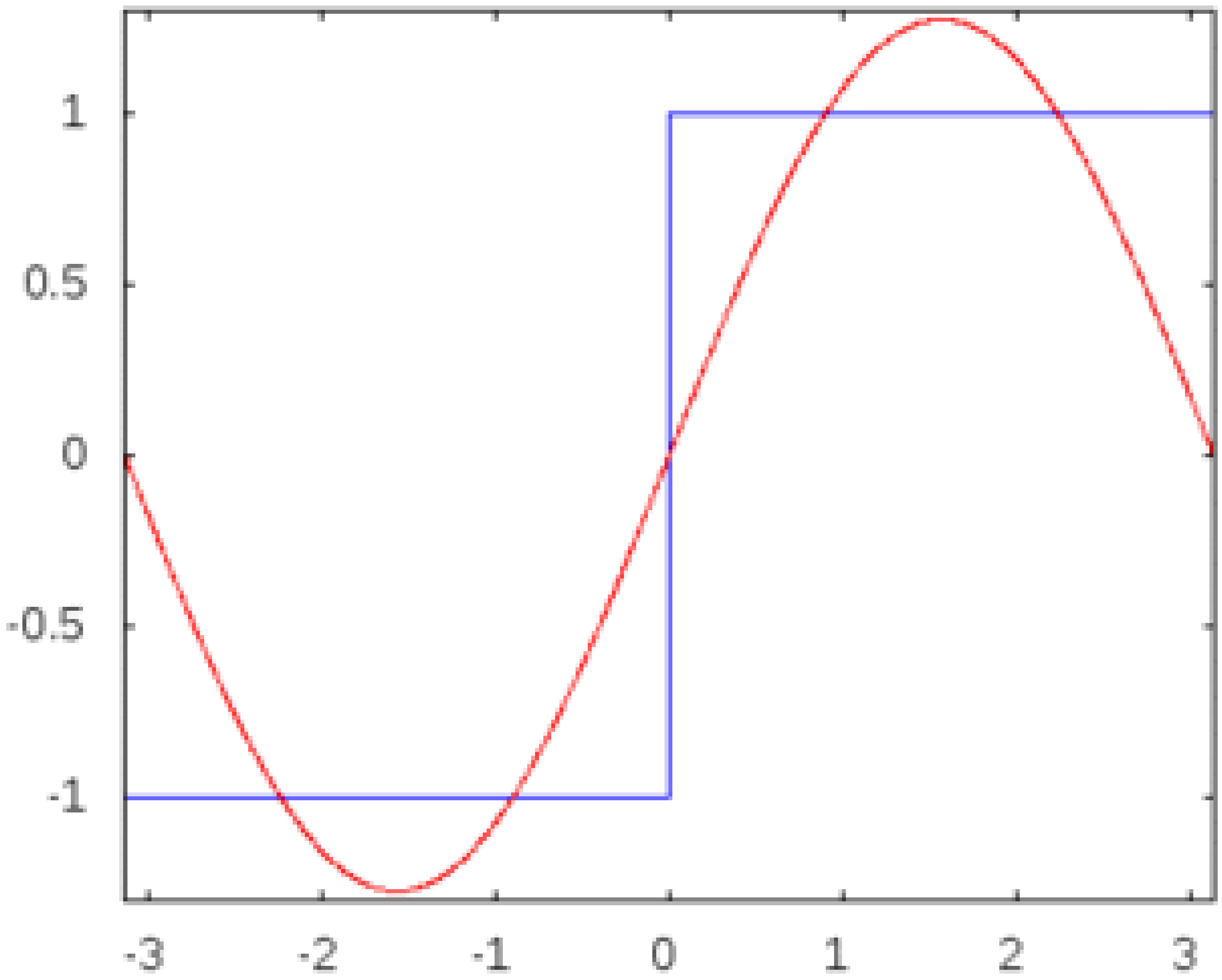




Lo stesso discorso relativo al numero di termini elementari necessari a rappresentare le onde triangolari e a dente di sega, vale per le due onde sopra.

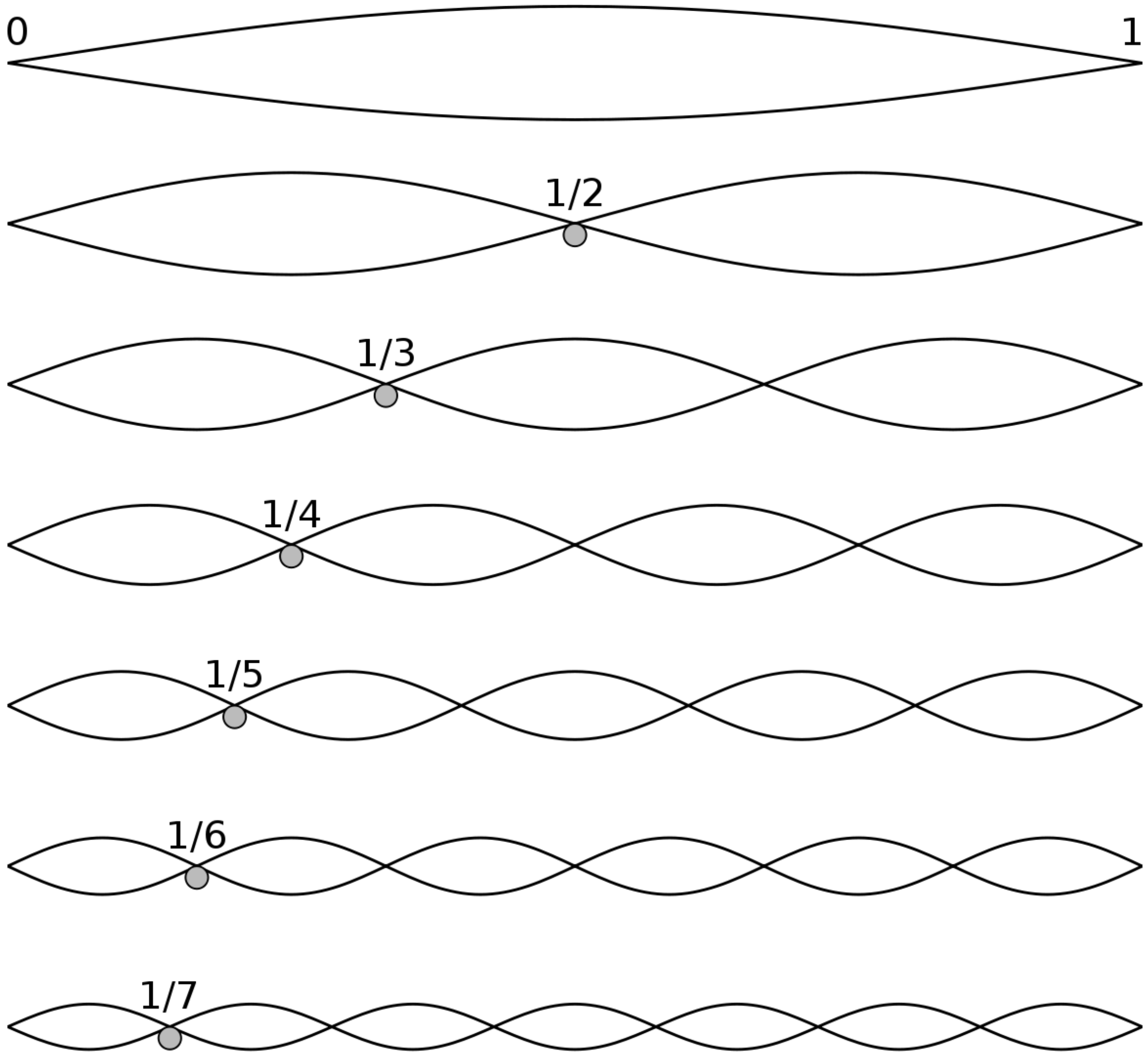
# Esempi – Spettro onda quadra



# Esempi – Spettro onda quadra



# Armoniche e frequenze




Frequenza Fondamentale: f

2^ Armonica: 2*f

3^ Armonica: 3*f

4^ Armonica: 4*f

5^ Armonica: 5*f

6^ Armonica: 6*f

7^ Armonica: 7*f

# Esercitazione Pratica

- <u>Onde speciali</u>
  In un editor audio creare i seguenti toni:
  - (1) 100 Hz, ampiezza 0.1 – FREQUENZA FONDAMENTALE
  - (2) 200 Hz, ampiezza 0.05
  - (3) 300 Hz, ampiezza 0.033
  - (4) 400 Hz, ampiezza 0.025
  - (5) 500 Hz, ampiezza 0.02
  - (6) 600 Hz, ampiezza 0.016
  - (7) 700 Hz, ampiezza 0.014

L'ampiezza di ogni armonica N è pari all'ampiezza dell'armonica fondamentale diviso N

- Mixare solo le tracce dispari (1,3,5,7) → Onda quadra
- Mixare tutte le tracce (Onda a dente di sega)

# Trasformata di Fourier

- Come abbiamo visto, la Serie di Fourier può essere utilizzata solo per onde periodiche.
- In natura moltissime onde sono però **aperiodiche**.
- Per questo motivo, se l'onda è periodica a meno di qualche piccola variazione si usa la Serie al prezzo di un po' di imprecisione.
- In alternativa si è costretti ad utilizzare la Trasformata di Fourier. Gli spettri ottenuti dalla Trasformata di Fourier per onde generiche, sono ricchi di frequenze che variano in un insieme **continuo** e non discreto (Serie).

# Serie e trasformata - Forma esponenziale

## Trasformata di Fourier

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(n) e^{i\omega n t} dn \qquad C(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-i\omega n t} dt$$

## Serie di Fourier

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\omega n t} \qquad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) e^{-i\omega n t} dt$$

Ponendo $c_{-n} = c_n{}^*$ (* complesso coniugato)

Come si può notare, la Serie di Fourier è un caso particolare della Trasformata. **Nella pratica, per i segnali digitali, si utilizzano la Serie discreta e la Trasformata discreta di Fourier.**

# Il suono - Ridefiniamo

Il **suono** è un <u>insieme</u>[1] di <u>onde meccaniche</u>[2] <u>longitudinali</u>[3].

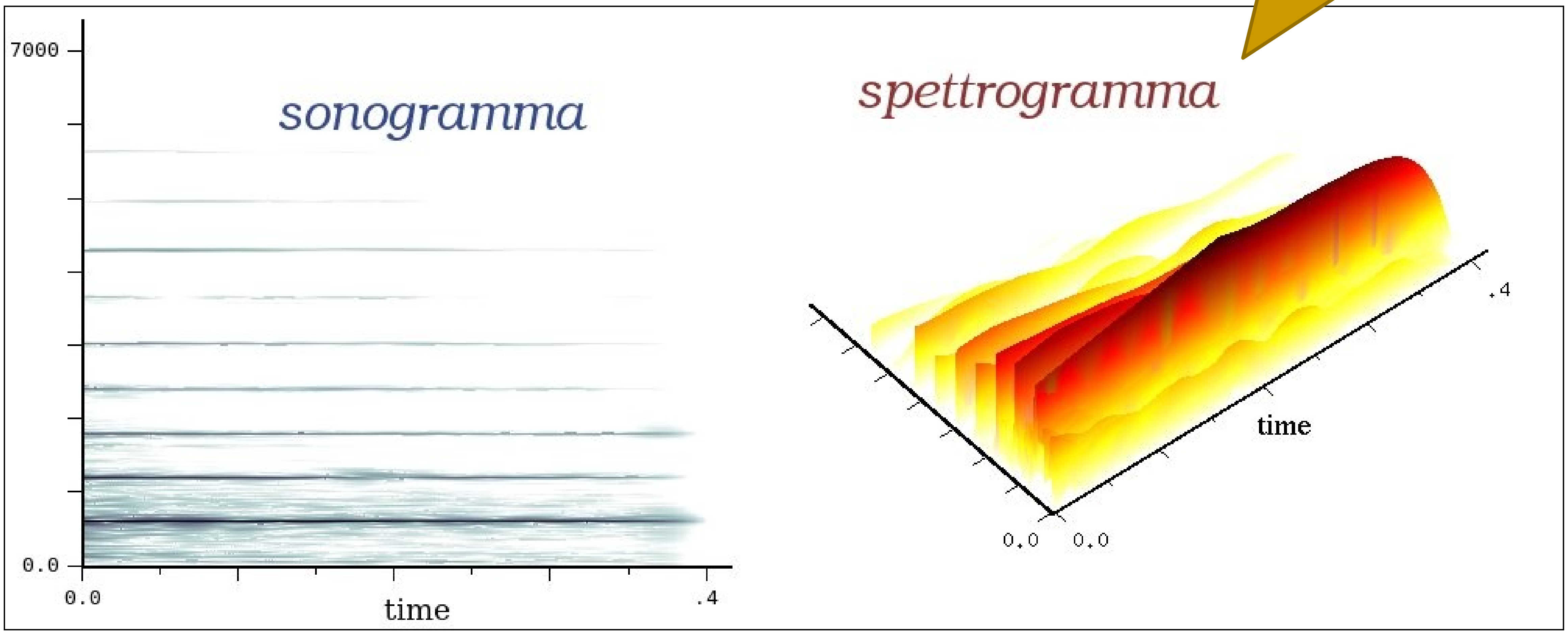
- [1] Consiste in una somma di più onde sinusoidali a diverse frequenze.
- [2] Onde che si propagano in un mezzo materiale.
- [3] Le particelle del mezzo si muovo in direzione parallela a quella di propagazione.

# Riassunto delle definizioni date (dal testo)

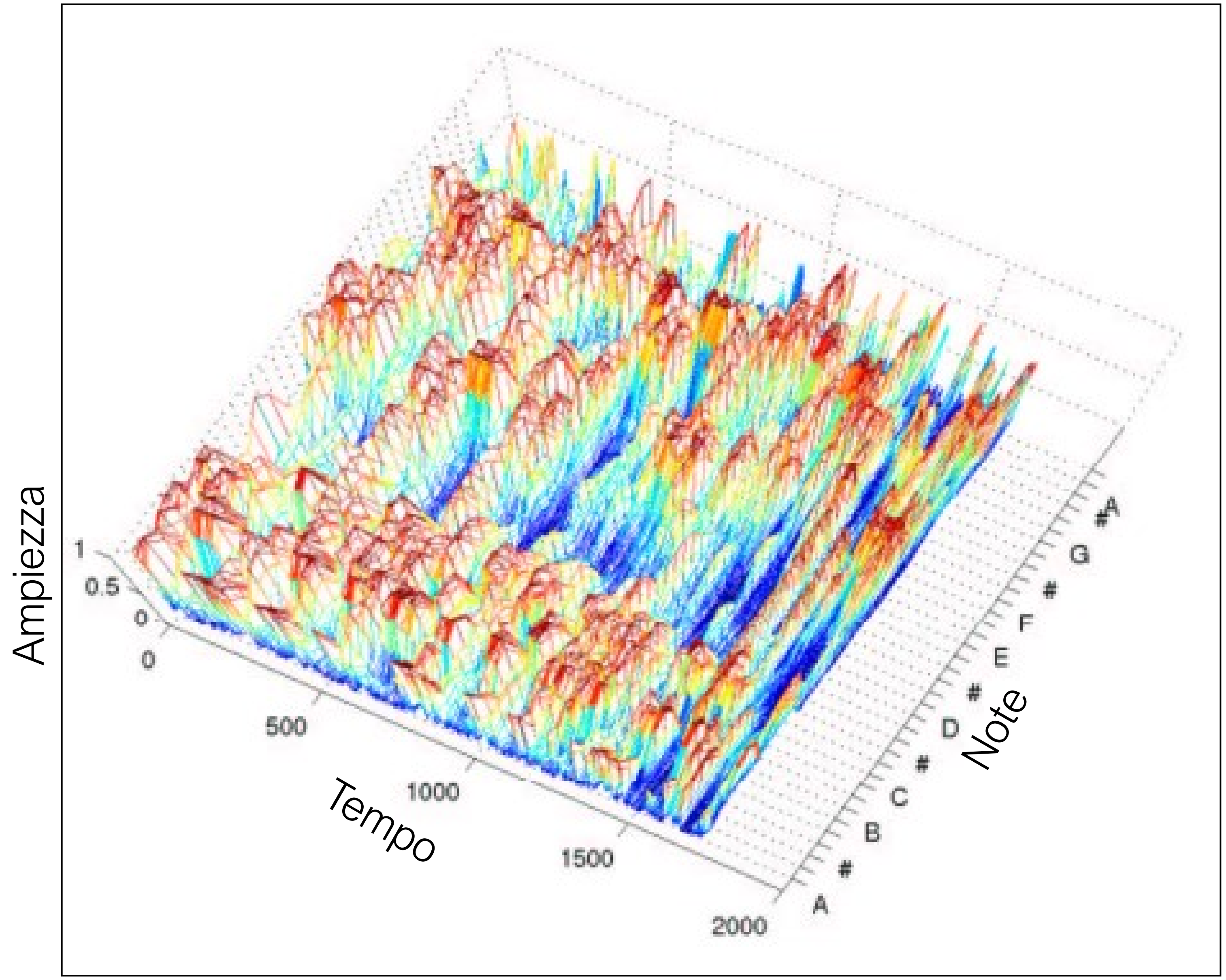
- Analisi Armonica di Fourier:
  - L'individuazione di segnali semplici che compongono un segnale complesso
- Trasformata di Fourier:
  - Permette di individuare le componenti di frequenza di un segnale
- Serie di Fourier:
  - Caso particolare della Trasformata di Fourier,
    - applicabile nel caso di segnali complessi periodici
- Spettro di Fourier:
  - L'insieme delle componenti di un segnale, con la propria ampiezza e fase
- Sintesi di Fourier:
  - La sintesi di un suono a partire da sinusoidi semplici

# Altre rappresentazioni dello spettro

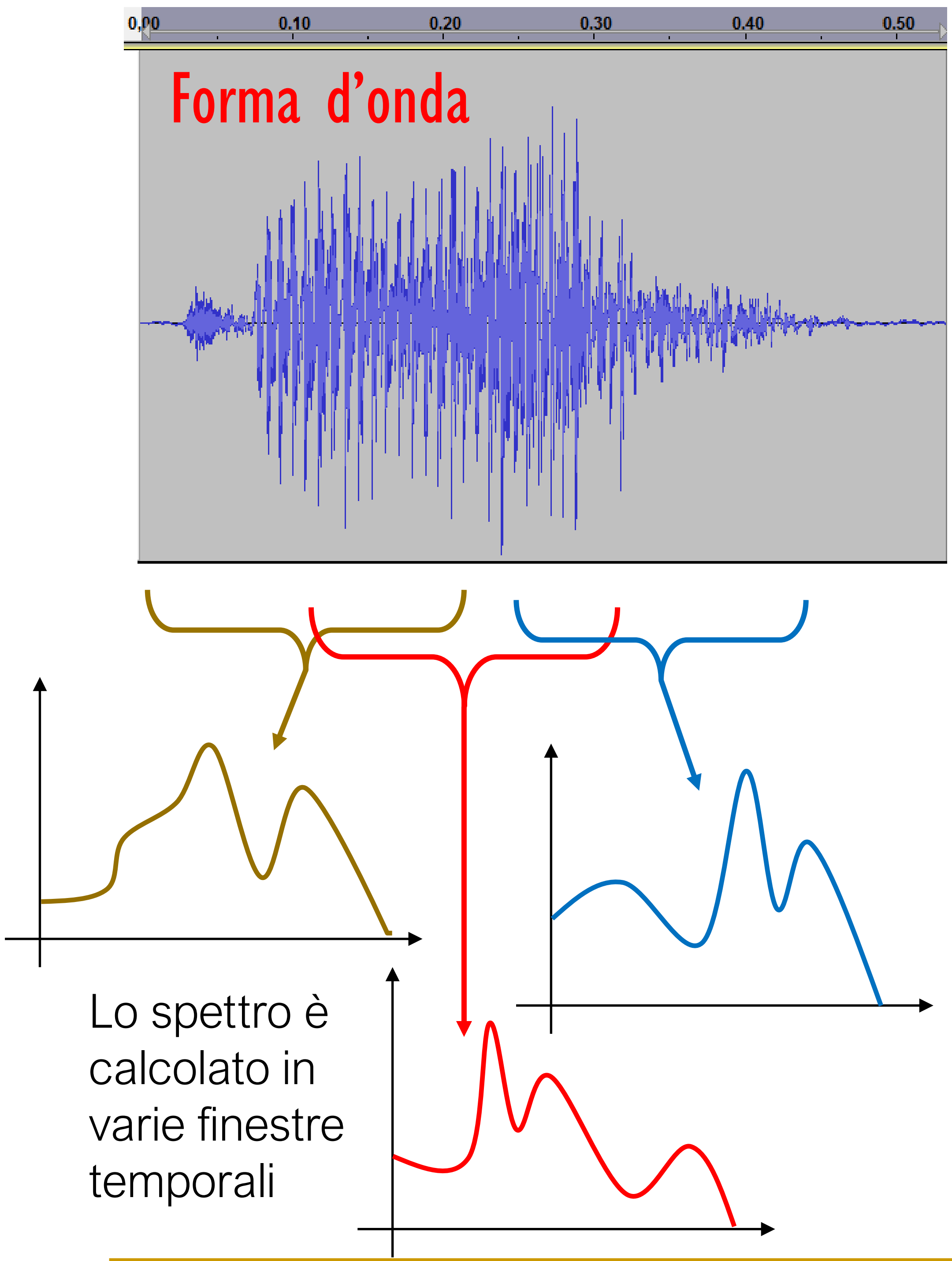
Sonogramma e Spettrogramma sono sinomini



# Altre rappresentazioni dello spettro

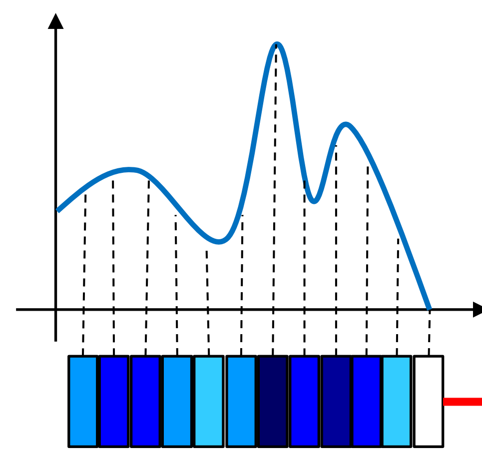


# Altre rappresentazioni dello spettro



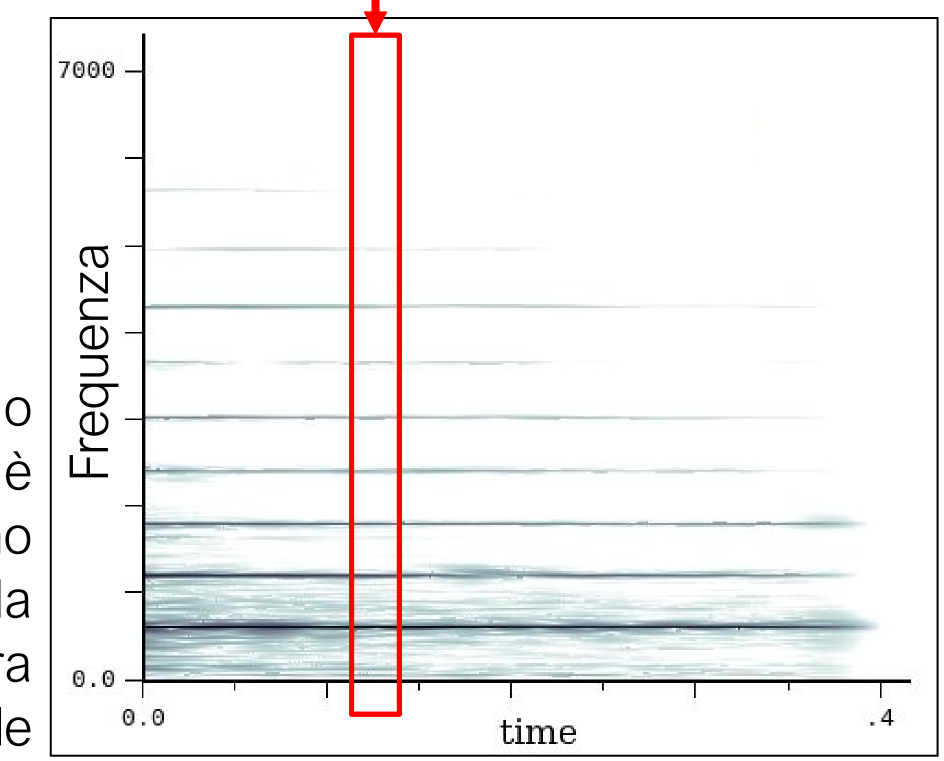

Lo spettro è calcolato in varie finestre temporali

Spettro (continuo)



Se lo vedessimo… dall'alto
*Colori più scuri → Valori più alti*
*Colori più chiari → Valori più bassi*

Ogni *colonna* nello spettrogramma è relativa ad uno spettro calcolato da una finestra temporale



# Spettro

Lo **spettro** di un suono ne caratterizza il **timbro**, ossia quell'insieme di proprietà che determinano la distinzione tra due suoni anche a parità di ampiezza e frequenza.

Quindi la voce umana, una chitarra e un pianoforte avranno un **timbro** diverso. Infatti anche emettendo la stessa nota, questi possono essere distinti con facilità.

La caratterizzazione è data dal numero e dal contributo delle varie frequenze nello spettro (diverse da quella che contribuisce maggiormente). Il timbro può essere usato per identificare il tipo della sorgente sonora.

# Spettro - Esempi

Ricordiamo che lo spettro è molto utile per la descrizione di suoni **complessi**. Tutti i fenomeni visti che interessano frequenza, ampiezza e lunghezza d'onda, continuano a valere. Ovviamente si applicheranno alle singole componenti.

Ad esempio la **diffrazione** si verificherà comunque, interessando maggiormente le lunghezze d'onda più grandi e meno quelle più piccole, producendo difatti una distorsione.

# Approfondimenti

- *Cenni biografici su Joseph Fourier*
  http://www.dm.unipi.it/mat_dia_med/Fourier.pdf
- *[EN] Odds vs Even Harmonics (YouTube)*
  https://www.youtube.com/watch?v=RUpvAdF3M2M
- *[EN] How are harmonics cancelled in symmetrical waveform?*
  https://www.quora.com/How-are-harmonics-cancelled-in-symmetrical-waveform
- *[EN] What is harmonics?*
  https://electricalnotes.wordpress.com/2011/03/20/harmonics-and-its-effects/
  - *"For symmetrical waveforms, i.e. where the positive and negative half cycles are the same shape and magnitude, all the even numbered harmonics is zero. Even harmonics are now relatively rare but were common when half wave rectification was widely used."*