Acustica
Parte 3

Prof. Filippo Milotta
milotta@dmi.unict.it

Frequenza dei suoni - Note

- Nella musica la frequenza di un suono caratterizza le **note musicali**.

- Potremmo pensare che la **nota** corrisponda allora ad un tono puro, ma come sappiamo la stessa **nota** può essere prodotta da diversi strumenti musicali ed essere quindi percepita in maniera differente.

- In realtà la nota dipende dalla frequenza predominante nello **spettro** dell'onda sonora. Tutte le altre frequenze caratterizzano invece lo strumento.

Frequenza dei suoni - Note

Si definisce **nota musicale** ciascuno dei simboli utilizzati nella musica per descrivere un particolare suono.

Le note musicali più conosciute sono quelle della **scala diatonica.** Sono 7 e si ripetono a frequenze differenti.

Do Re Mi Fa Sol La Si
T – T – sT – T – T – T – sT

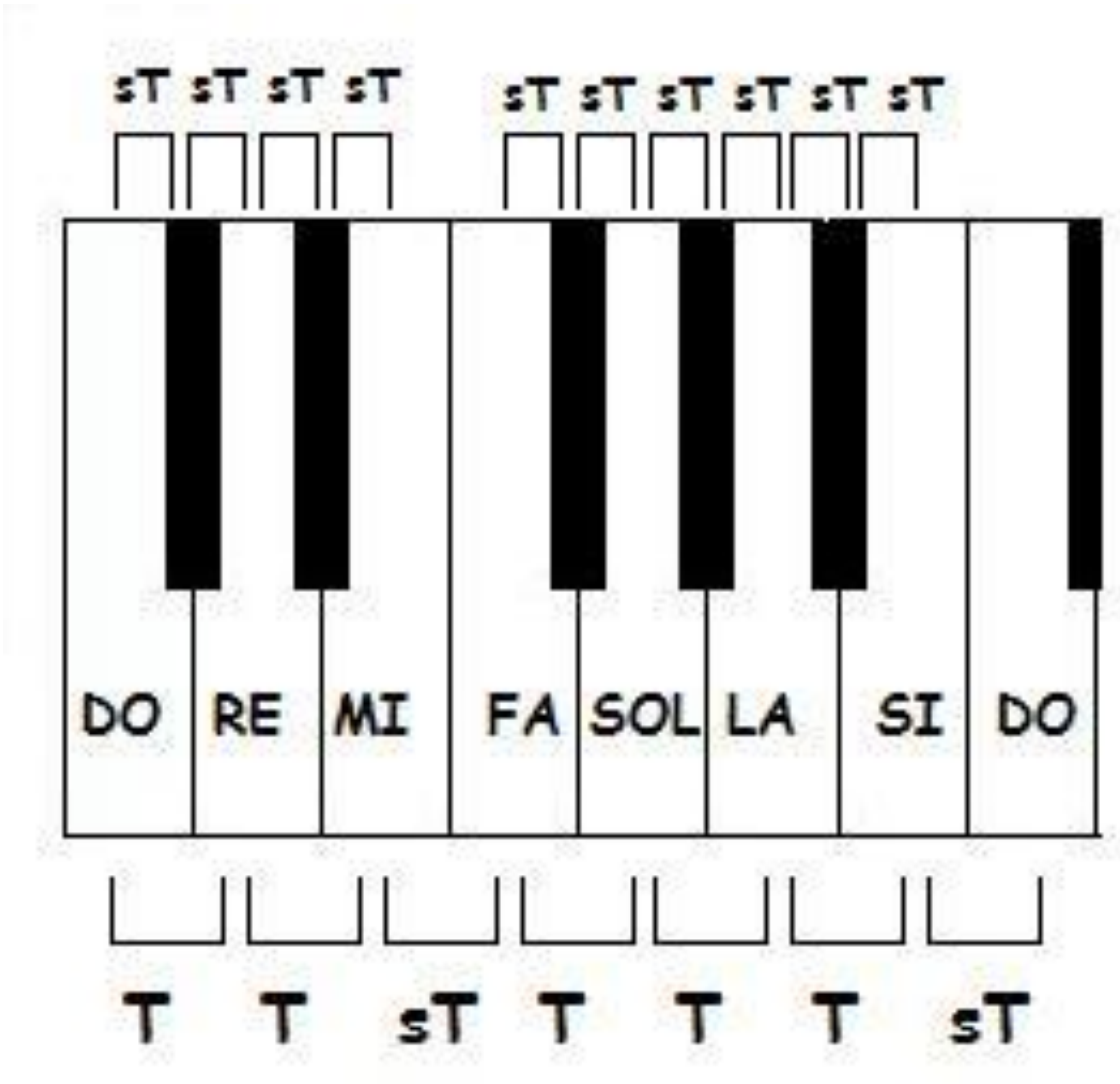
Esistono tuttavia altre scale, come la scala **temperata** e la scala **cromatica**.

Frequenza dei suoni - Note

Per ragioni storiche e psicoacustiche, le note sono ripartite all'interno di intervalli denominati **ottave.**

L'**ottava** è l'intervallo che intercorre tra **note** uguali di cui una ha frequenza doppia dell'altra. Ogni ottava inizia con la stessa nota dell'ottava precedente (ma di frequenza doppia).

Frequenza dei suoni – Ottava



sT = Semitono

T = Tono (2 semitoni)

Frequenza dei suoni - Note

- Ogni **ottava** nella **scala diatonica** contiene 8 note della scala stessa. Es:

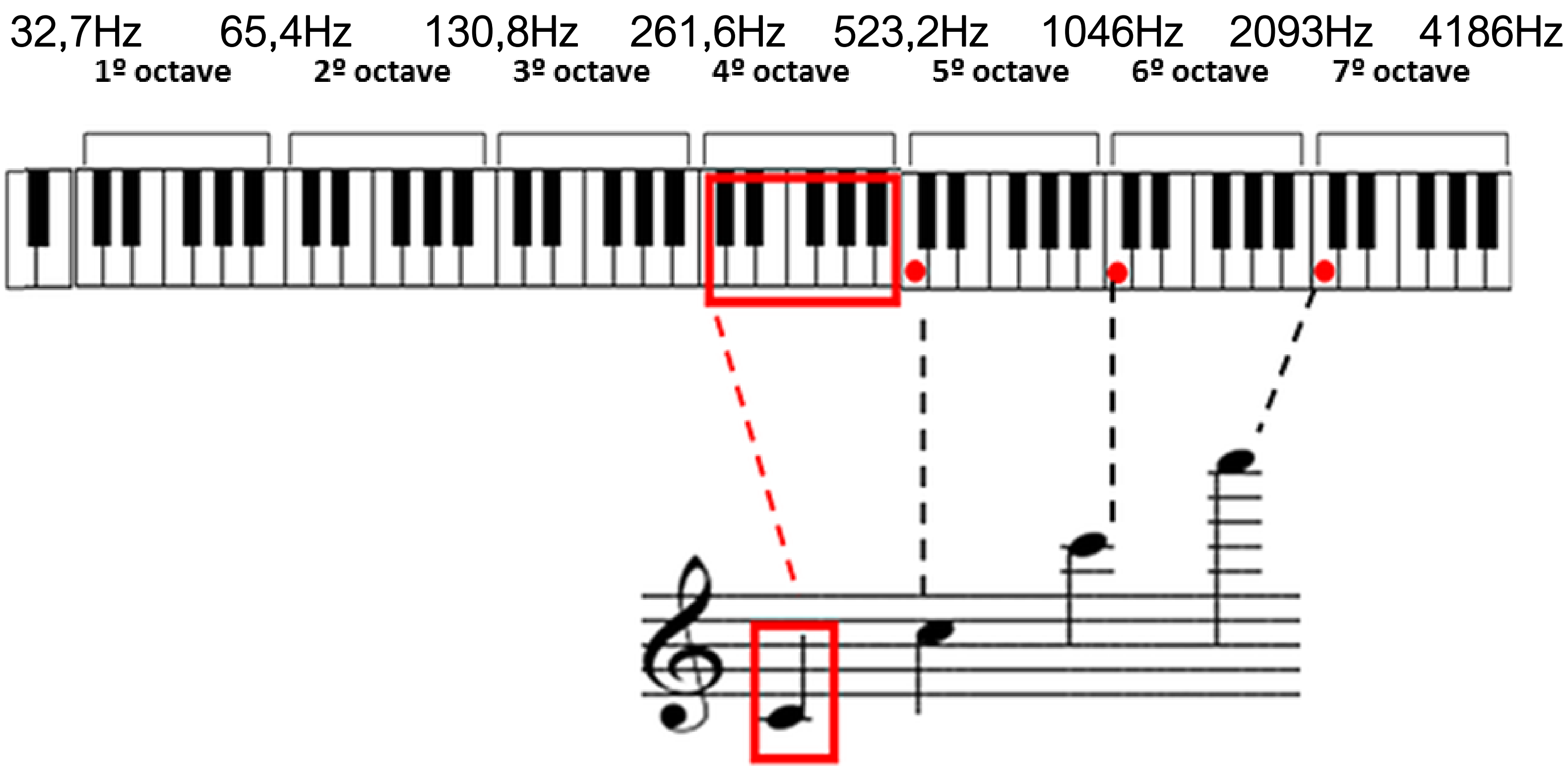
Do Re Mi Fa Sol La Si Do

- Nella **<u>scala temperata (occidentale)</u>** le ottave sono divise in 12 semitoni. Un semitono consiste in un aumento in frequenza di un fattore $2^{1/12}$ tra note adiacenti. Ciò significa che il rapporto tra la frequenza di una nota e quella che la precede, sarà uguale $2^{1/12}$. Ogni ottava contiene 13 note tra cui quelle della scala diatonica e 5 variazioni precedute dal simbolo #. Es:

Do #Do Re #Re Mi Fa #Fa Sol #Sol La #La Si Do

Frequenza dei suoni – Ottava

L'**ottava** è l'intervallo che intercorre tra **note** uguali di cui una ha frequenza doppia dell'altra. Ogni ottava inizia con la stessa nota dell'ottava precedente (ma di frequenza doppia).



do_4	$do\#_4$	re_4	$re\#_4$	mi_4	fa_4	$fa\#_4$	sol_4	$sol\#_4$	la_4	$la\#_4$	si_4
261,6Hz	277,2Hz	293,7Hz	311,1Hz	329,6Hz	349,2Hz	369,9Hz	392Hz	415,3Hz	440Hz	466,1Hz	493,9Hz

Frequenza dei suoni - Note

Di recente (1939) è stato deciso di utilizzare come nota di riferimento il **La**, fissato ad una frequenza di **440 Hz**. Un **diapason** opportunamente costruito può emettere esattamente un tono (quasi) puro a questa frequenza.

La frequenza di ogni nota può quindi essere definita in base alla distanza dal **La** fondamentale. Una nota distante n (intero relativo) semitoni da quella di riferimento nella scala occidentale avrà frequenza:

$$f_n = f_{ref} \times 2^{\frac{n}{12}} \qquad \text{con} \qquad f_{ref} = 440\ Hz$$

Frequenza dei suoni - Note

Note	Notazione Anglossassone	Frequenza (Hz)
la	A	$440.0 = 440 \times 2^{0/12}$
la#	A#	$466.2 = 440 \times 2^{1/12}$
si	B	$493.8 = 440 \times 2^{2/12}$
do	C	$523.2 = 440 \times 2^{3/12}$
do#	C#	$554.4 = 440 \times 2^{4/12}$
re	D	$587.3 = 440 \times 2^{5/12}$
re#	D#	$622.2 = 440 \times 2^{6/12}$
mi	E	$659.2 = 440 \times 2^{7/12}$
fa	F	$698.4 = 440 \times 2^{8/12}$
fa#	F#	$740.0 = 440 \times 2^{9/12}$
sol	G	$784.0 = 440 \times 2^{10/12}$
sol#	G#	$830.6 = 440 \times 2^{11/12}$
la	A	$880.0 = 440 \times 2^{12/12}$

Semitono

Ottava

Frequenza dei suoni – Tabella note

Note	ottave									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Do	16,35	32,70	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093	4186	8372
Do#-Reb	17,32	34,65	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217	4435	8870
Re	18,35	36,71	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349	4699	9397
Re#-Mib	19,45	38,89	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489	4978	9956
Mi	20,60	41,20	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637	5274	10548
Fa	21,83	43,65	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794	5588	11175
Fa#-Solb	23,12	46,25	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960	5920	11840
Sol	24,50	49,00	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136	6272	12544
Sol#-Lab	25,96	51,91	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322	6645	13290
La	27,50	55,00	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520	7040	14080
La#-Sib	29,14	58,27	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729	7459	14917
Si	30,87	61,74	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951	7902	15804

Nella musica si usano ottave che iniziano sempre con il **Do**, ma nulla vieta di iniziare con altre note. Come visto con il **La** fondamentale, è possibile ricavare le frequenze di tutte le note fissandone una di riferimento e conoscendo la «distanza» da questa.

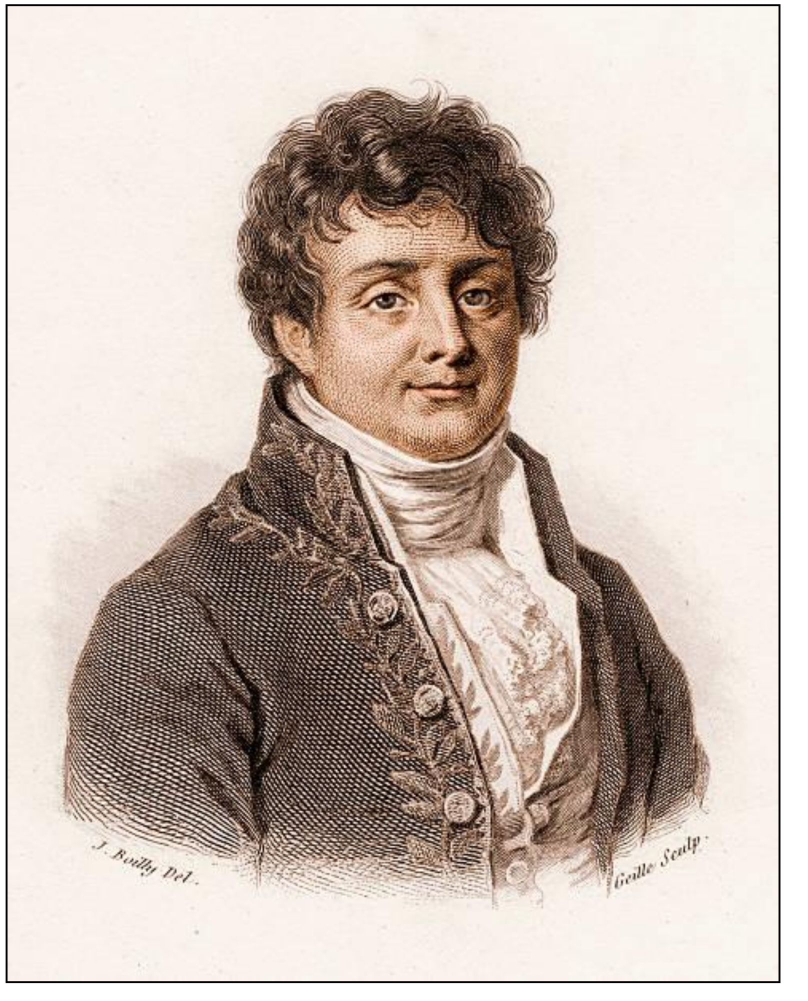
Alcune frequenze tipiche (dal testo)

Suono	Frequenza (Hz)
La nota più bassa di un pianoforte	27,5
La nota più bassa di un cantante basso	100
La nota più bassa di un clarinetto	104,8
Il do centrale del pianoforte	**261,6**
Il la oltre il do centrale del pianoforte	**440**
L’estensione superiore di un soprano	1000
La nota più alta di un pianoforte	4180
L’armonica superiore degli strumenti musicali	10.000
Il limite dell’udito nelle persone anziane	12.000
Il limite dell’udito	16.000-20.000

ANALISI DI FOURIER

Joseph Fourier (1768 – 1830)

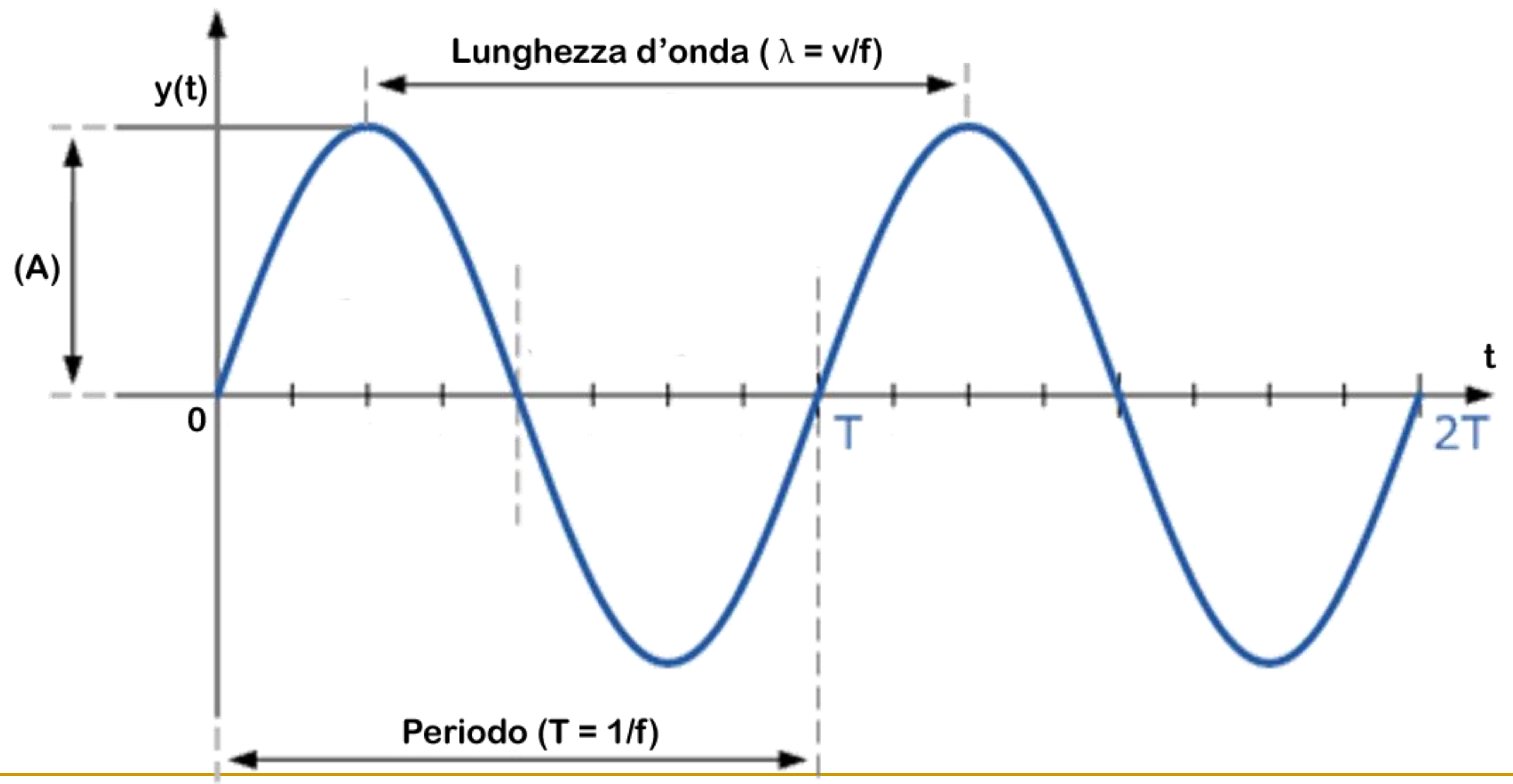
- Professore, poliziotto segreto, prigioniero politico, Governatore d’Egitto, Prefetto di Francia, amico e forte sostenitore di Napoleone Bonaparte
- Tutta la sua opera fu pionieristica, e oggi è considerato il padre dell’*analisi armonica*. Morì a Parigi a 62 anni, il 16 maggio del 1830, per un attacco cardiaco



Esempio – Onda sinusoidale

$$y(t) = A\sin(2\pi f t + \varphi_0)$$

Dove A è la metà dell'ampiezza, f la frequenza. In questo caso, il termine $2\pi f t + \varphi_0$ è la **fase**, mentre φ_0è la fase iniziale,



Analisi armonica di Fourier

- Per studiare le onde è molto utile scriverle in forma matematica (es: sinusoide), cioè descriverle tramite una **funzione**.

- La maggior parte delle onde ha una forma generica difficile da descrivere.

- **L'analisi armonica di Fourier** è uno strumento molto potente, poiché ci permette di descrivere onde complesse come somma di onde più semplici, in particolare onde sinusoidali e/o cosinusoidali.

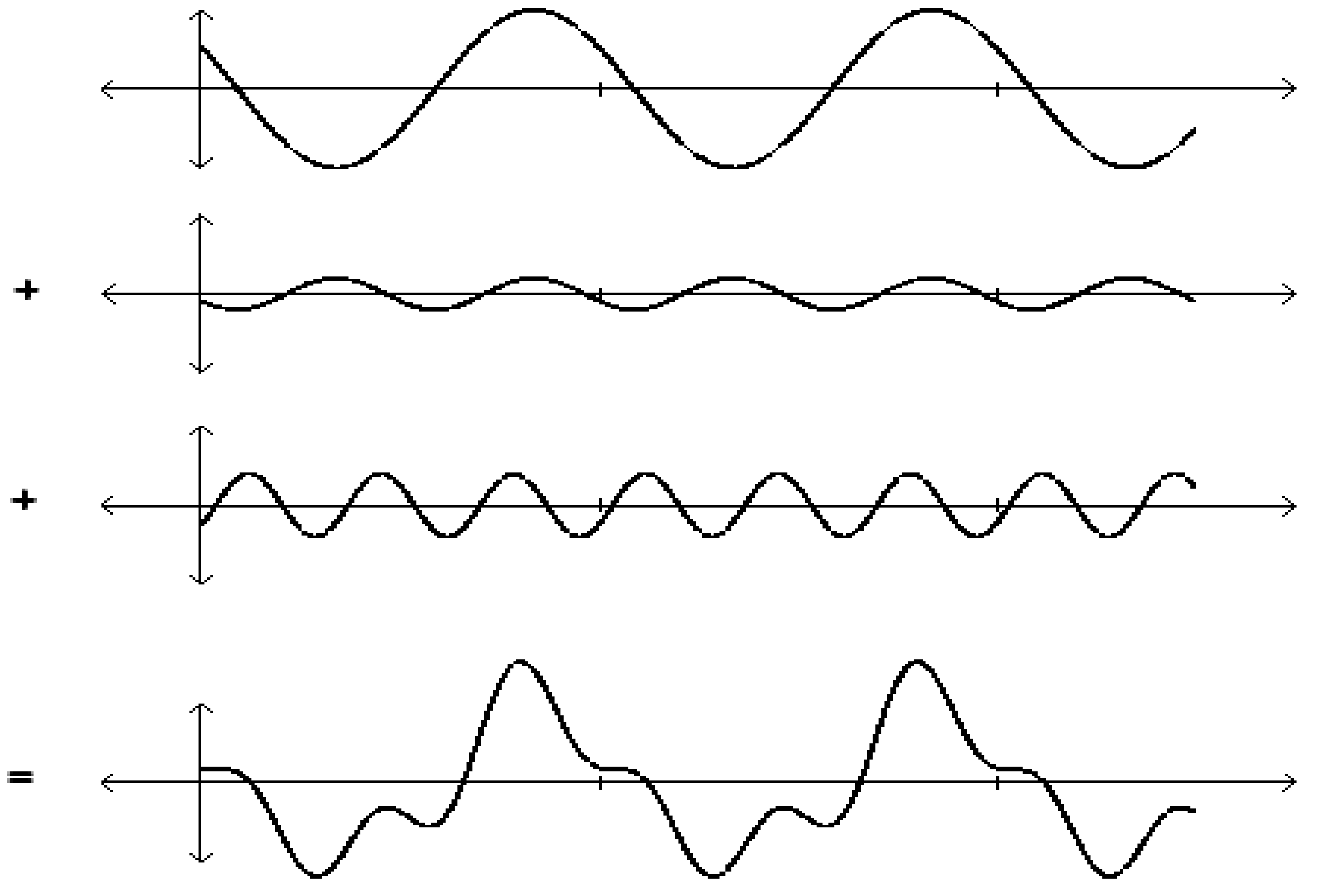
Teorema di Fourier

L'analisi armonica di Fourier si basa sull'omonimo teorema:

Qualunque funzione periodica, sotto opportune condizioni matematiche, di periodo T_1 o di **frequenza fondamentale** $f_1 = \frac{1}{T_1}$, può essere rappresentata mediante una somma di onde sinusoidali e/o cosinusoidali di opportuna ampiezza e di frequenza multipla della frequenza fondamentale.

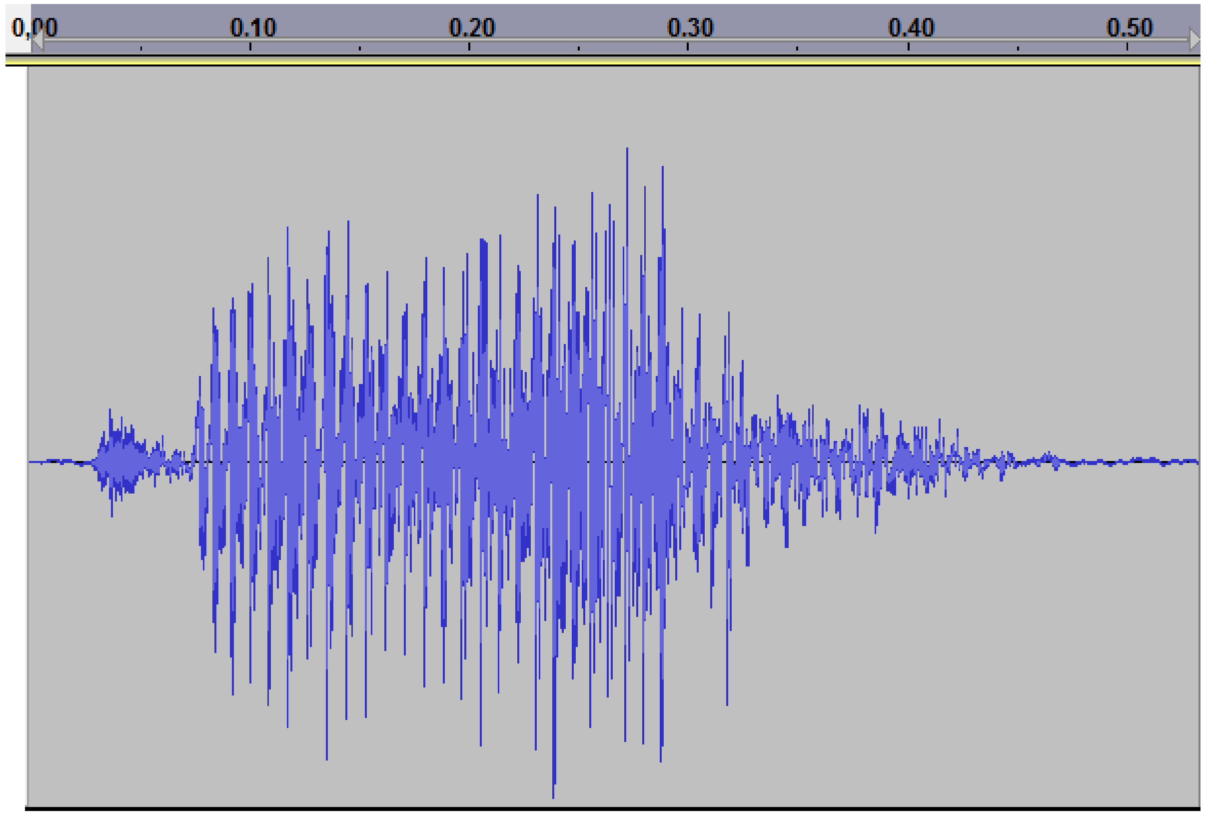
Queste «condizioni matematiche» sono sempre verificate nei segnali **fisici**. Dunque tutte le onde periodiche che incontreremo potranno sempre essere trattate con l'analisi di Fourier.

Teorema di Fourier – Idea

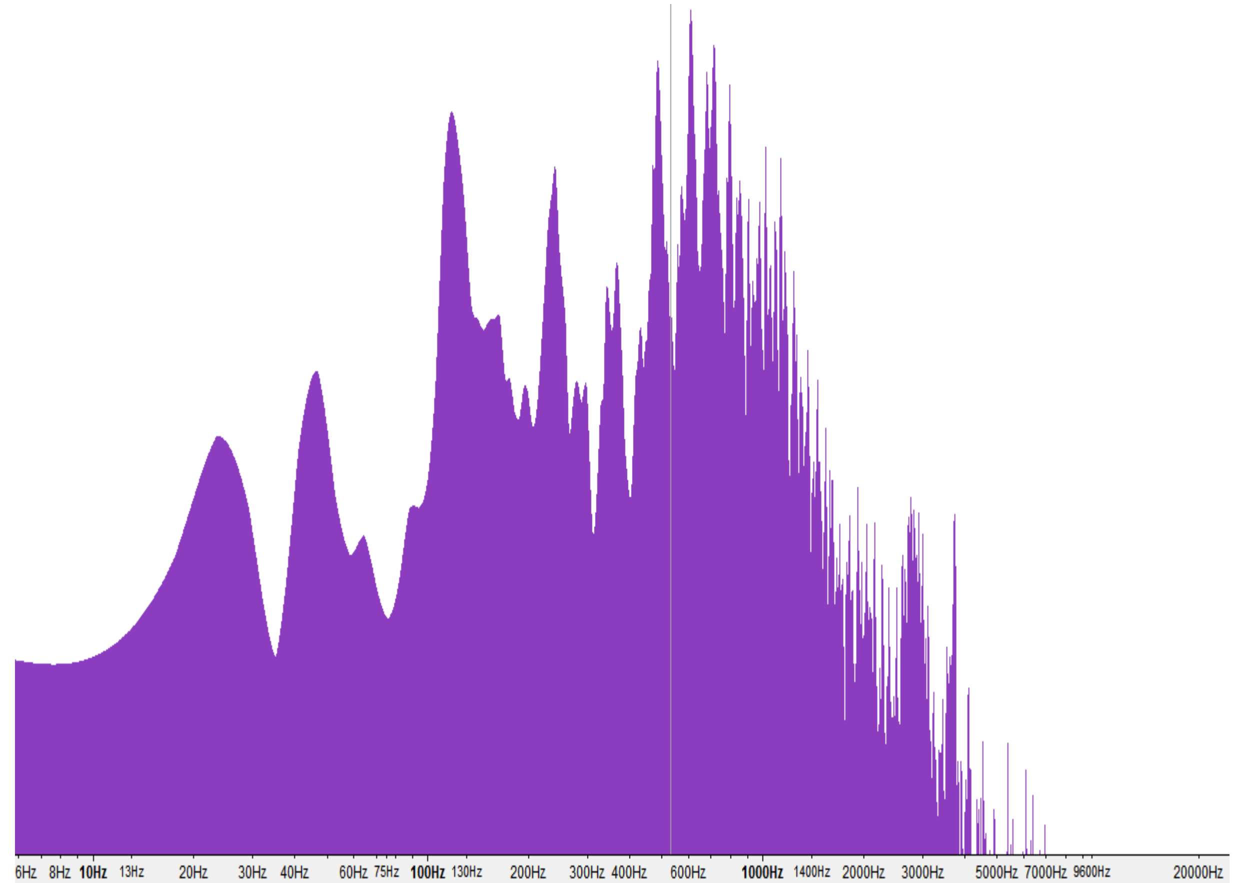


L'onda in basso può essere rappresentata come somma delle prime tre sinusoidi.

Frequenza dei suoni– Toni Complessi (Es.)



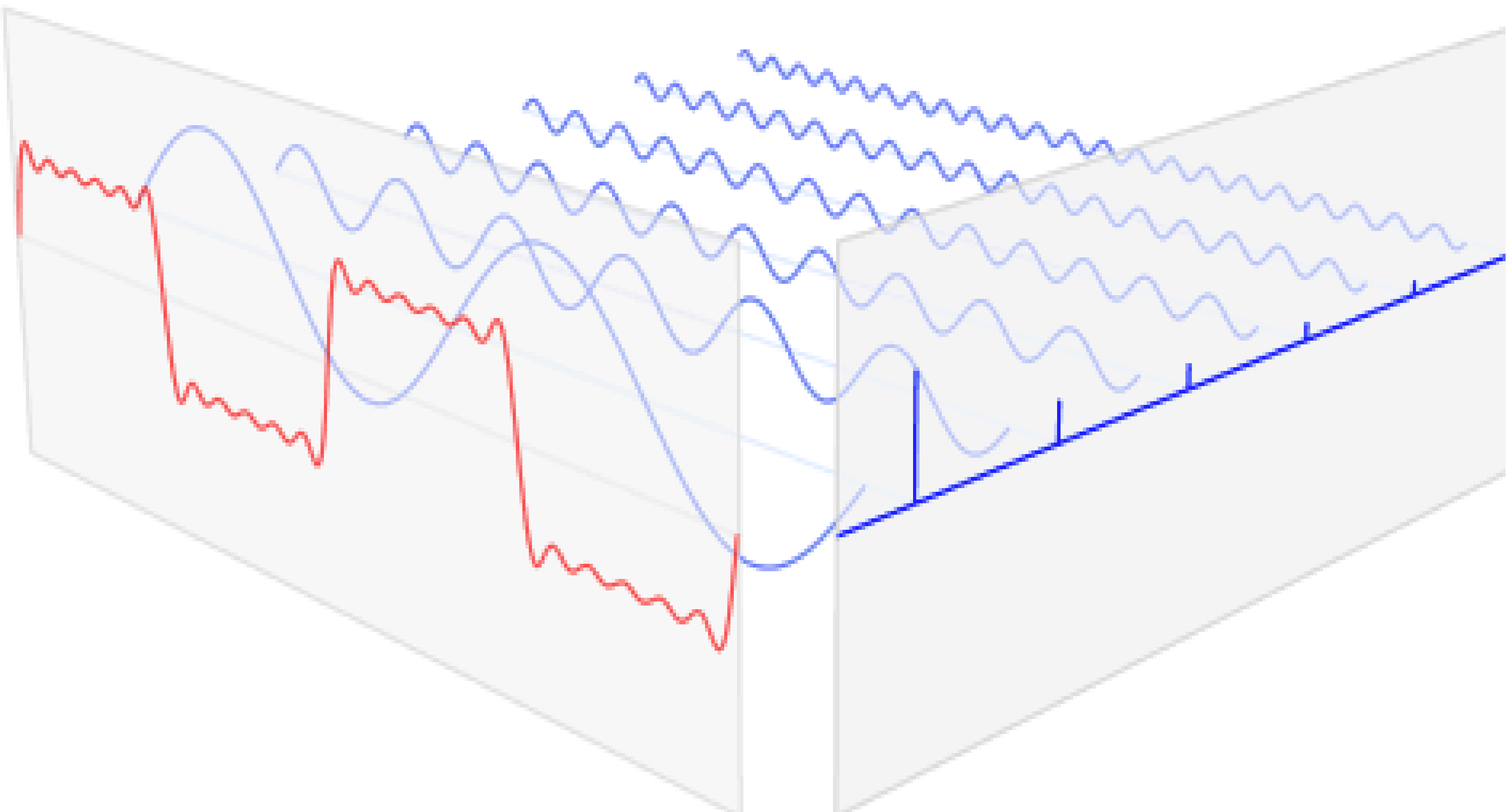
Forma d'onda



Spettro

A destra la forma d'onda associata alla parola «ciao» pronunciata da un essere umano. A sinistra lo spettro della dell'onda sonora. Si può notare l'enorme quantità di frequenze (sinusoidi) presenti.

Rappresentazione Frequenza-Tempo-Ampiezza



Serie e Trasformata di Fourier

- Lo strumento matematico per trovare i termini elementari che costituiscono un'onda periodica è la **Serie di Fourier**

- Nella maggior parte dei casi le onde non sono periodiche, ma si può comunque agire usando la **Trasformata di Fourier**. In questo caso le frequenze delle onde elementari non apparterranno all'insieme discreto dei multipli della **frequenza fondamentale,** ma varieranno in un insieme continuo.

Condizioni di Dirichlet

Non tutte le funzioni periodiche possono essere scritte utilizzando lo sviluppo in **Serie di Fourier.** Affinché questo sia possibile una funzione ***f*** deve soddisfare le <u>condizioni di Dirichlet</u>:

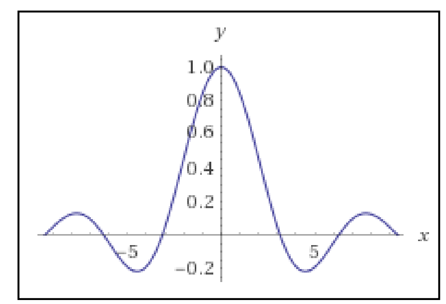
1) f deve essere **assolutamente integrabile** in un intervallo pari al periodo;

2) f deve avere un **numero finito di estremi** in un qualunque intervallo limitato;

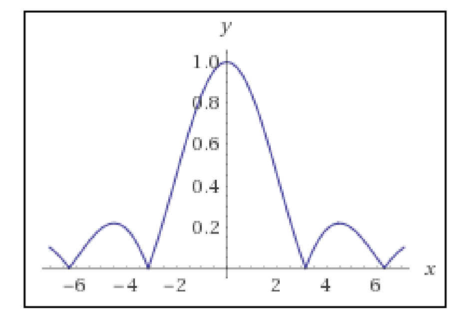
3) f deve essere continua o avere al massimo un **numero finito di punti di discontinuità di prima specie** in un qualunque intervallo limitato (continuità a tratti);

Caso 1

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

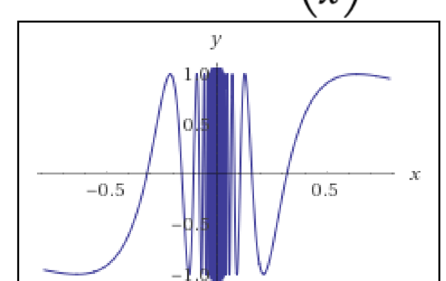


$$|f(x)| = \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$$

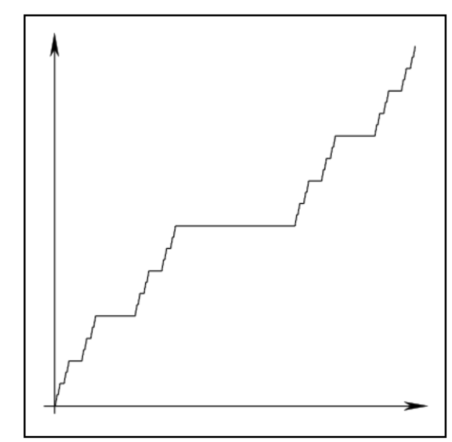


Caso 2

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



Caso 3 – Funzione di Cantor



Serie di Fourier

Sia $y(t)$ una funzione periodica di periodo T che soddisfi le condizioni di Dirichlet, allora essa può sempre essere scritta come:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\frac{2\pi}{T}t) + b_n \sin(n\frac{2\pi}{T}t)$$

Dove:

- n è un numero naturale e $\frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \omega$;
- l'espressione $a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ si chiama ***n*-esima armonica;**
- I termini a_n e b_n sono i **coefficienti** dell' n-esima armonica;
- L'armonica ottenuta per $n = 1$ si chiama **armonica fondamentale** ed ha frequenza pari a quella dell'onda

Serie di Fourier - Coefficienti

La formula vista prima non è complicata. Gli unici valori non noti sono i coefficienti, descritti dai seguenti integrali in t che dipendono dalla funzione iniziale $y(t)$.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)\ \cos(n\omega t)\ dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)\ dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)\sin(n\omega t)\ dt$$

$$\boxed{\frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \omega}$$

Serie di Fourier - Sinusoide

In realtà ogni armonica può essere scritta usando una sola funzione tra seno e coseno. Si dimostra cioè che:

$$y(t) = A\ sin(\omega t + \varphi_0) = a\, cos\, \omega t + b\, sin\, \omega t$$

DIM.

$$sin(a + b) = sin(a)cos(b) + sin(b)cos(a)$$

I. Applicando la formula di addizione del seno:

$$A\, sin(\omega t + \varphi_0) = A\ sin\, \omega t\, cos\, \varphi_0 + A\, sin\, \varphi_0\, cos\, \omega t$$

II. Ponendo $A\, cos\, \varphi_0 = b$ e $A\, sin\, \varphi_0 = a$ si conclude.

Analogo ragionamento vale per la funzione $A\, cos(\omega t + \varphi_0)$:

Serie di Fourier – Ampiezza armonica n

In generale si può dunque affermare che:

$$A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

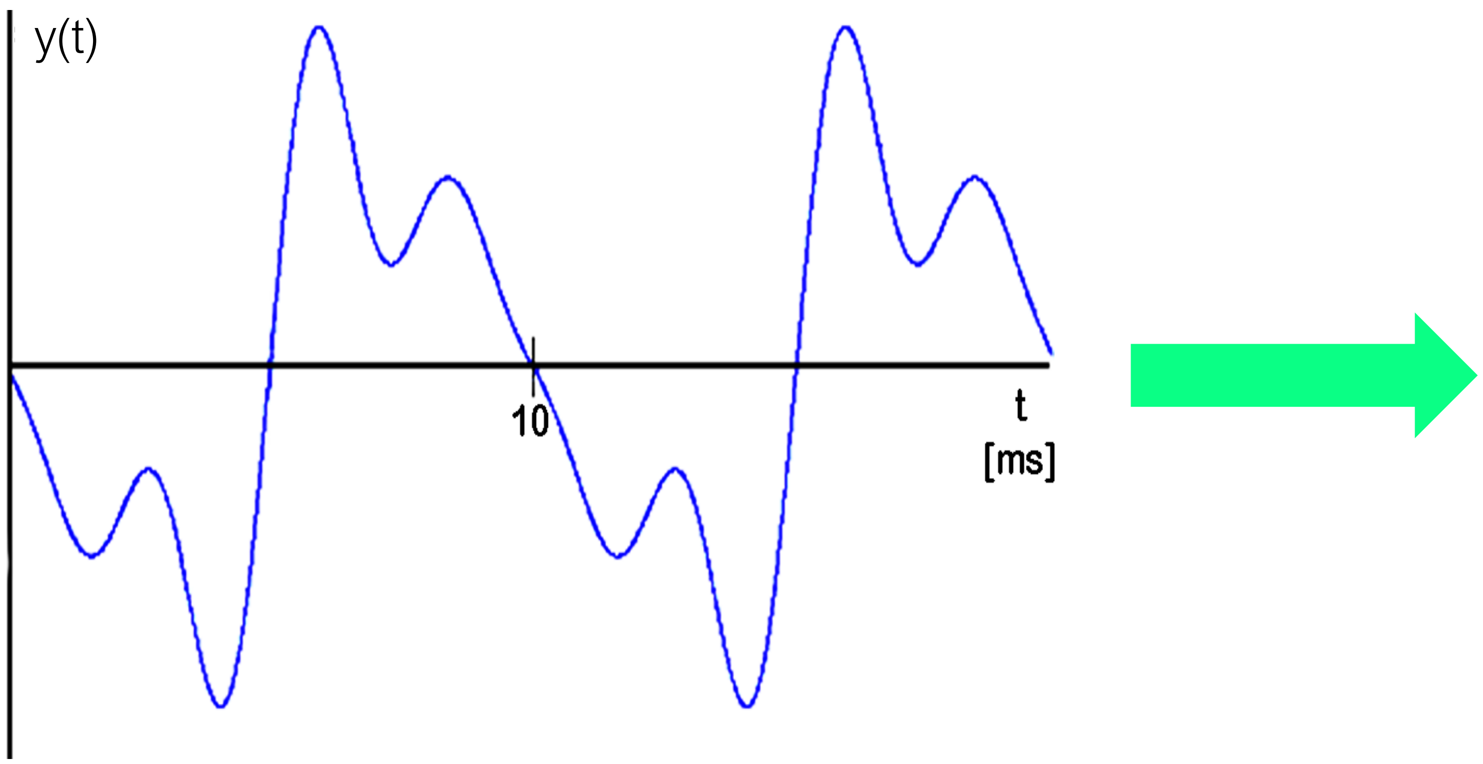
Il valore A_n è allora **l'ampiezza dell' $\boldsymbol{n}$-esima armonica**. Si può dimostrare (esercizio) che:

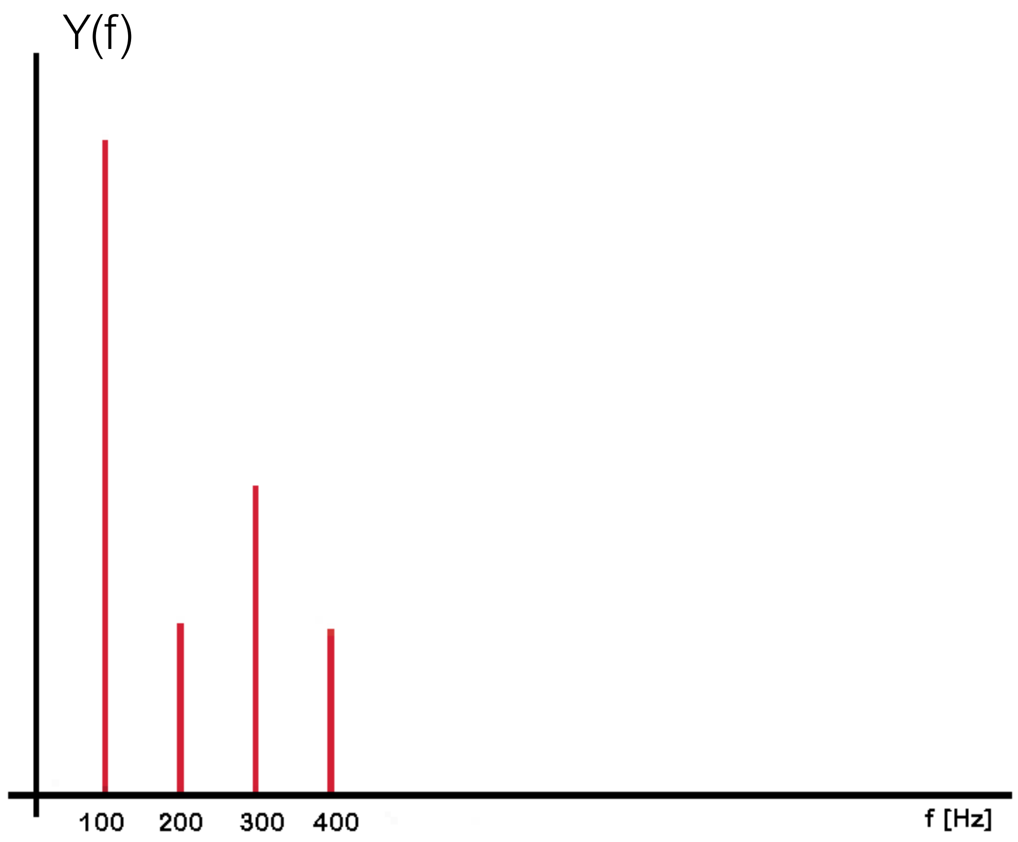
$$A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$$

Serie di Fourier - Spettro

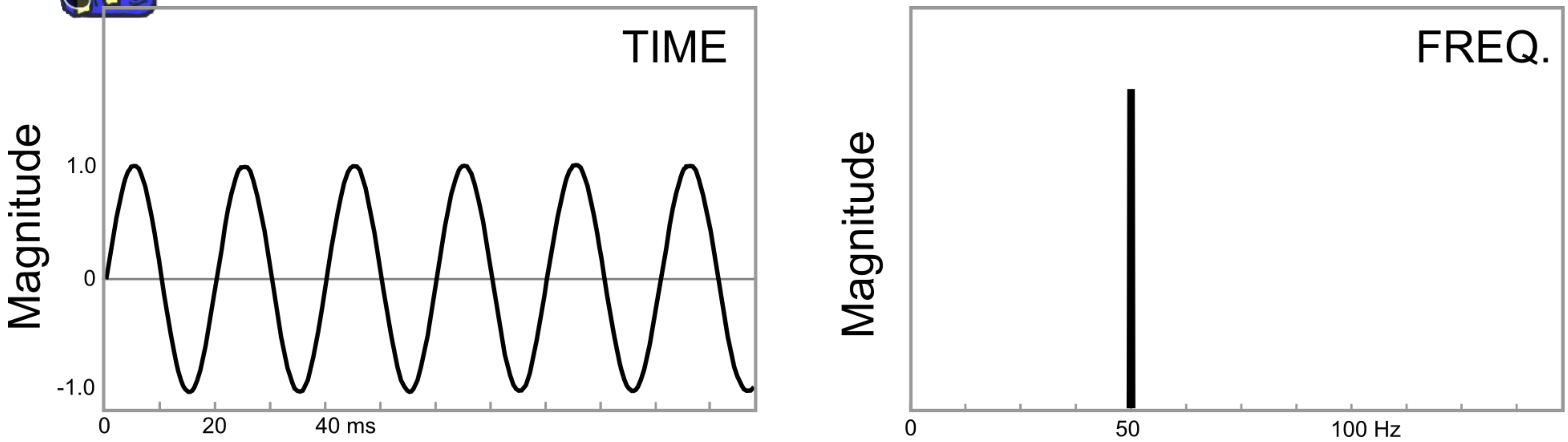
L'insieme delle frequenze delle onde elementari, con relativi contributi (A_n), che costituisce un'onda complessa prende il nome di **spettro**. Può essere indicato con $Y(f)$.

Lo spettro può essere rappresentato in un grafico **frequenza-ampiezza.** Si passa quindi dal **dominio del tempo** a quello **delle frequenze**





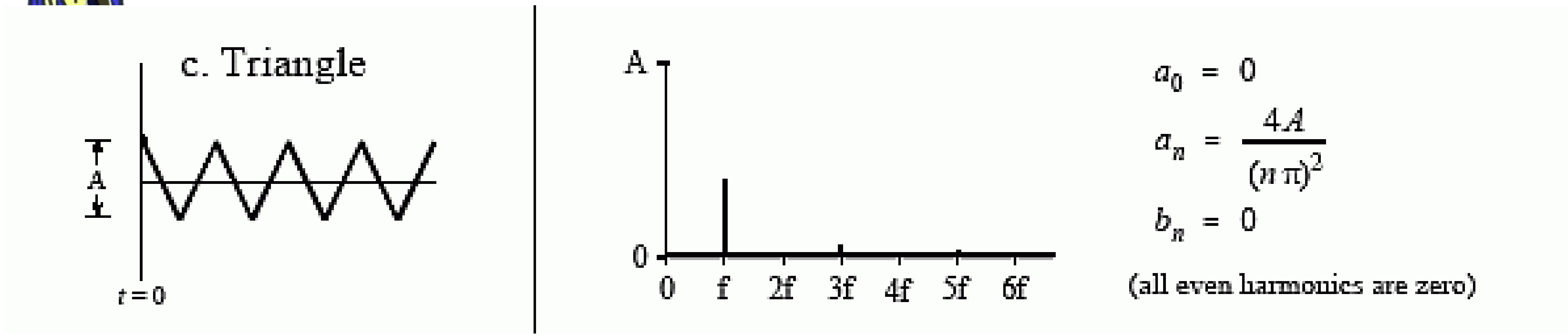
Esempi – Spettro onda sinusoidale

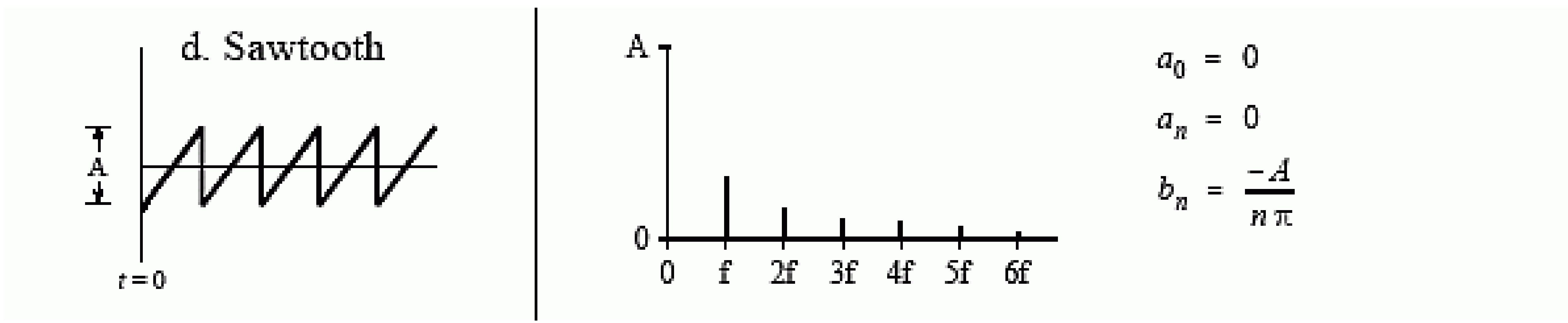


$$y(t) = sin(2\pi * 50 * t) \quad \Rightarrow \quad Y(f) = \begin{cases} 1, & f = 50 \\ 0, & altrimenti \end{cases}$$

Onda sinusoidale di periodo $20\, ms$ e quindi di frequenza $50\, Hz$. Lo spettro è chiaramente composto dalla sola frequenza dell'unica sinusoide che costituisce l'onda

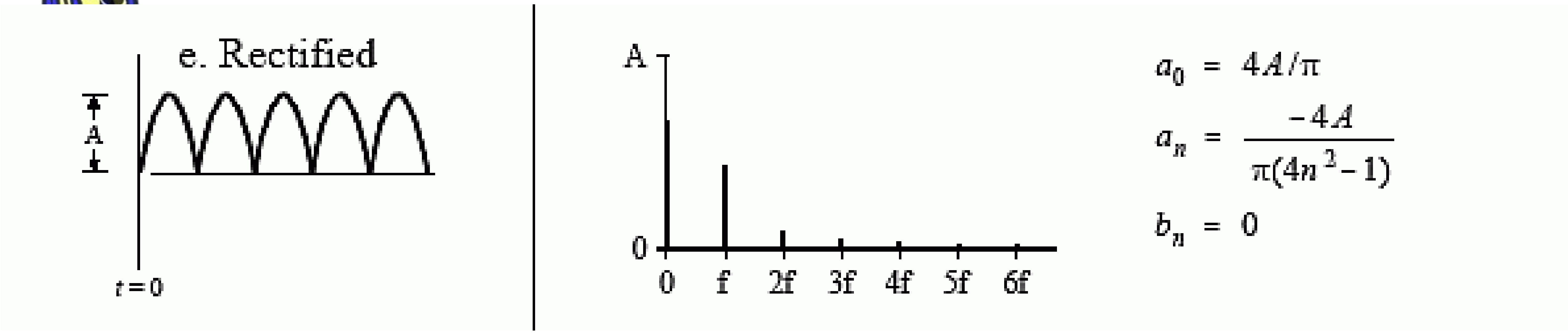
Esempi – Triangolare e Dente di sega

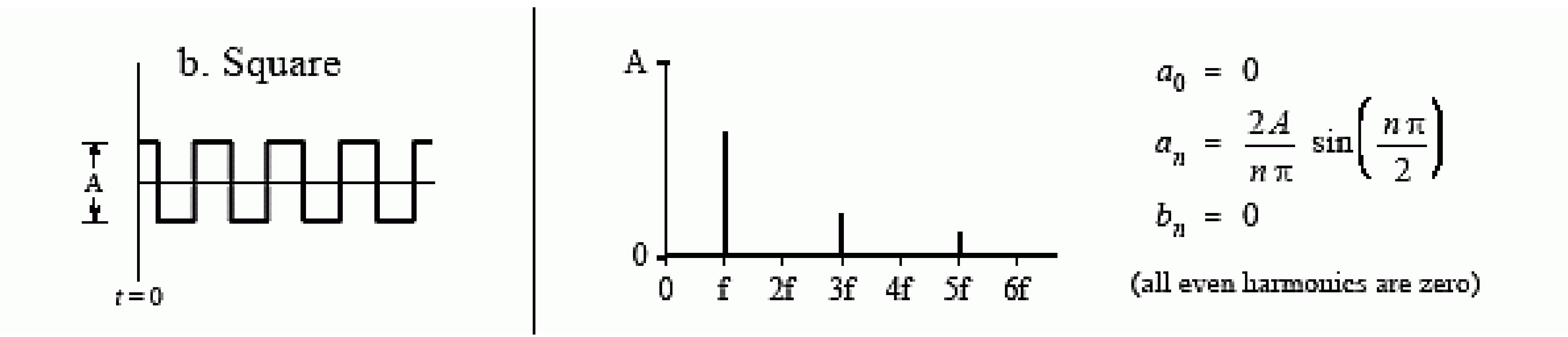




L'onda **triangolare** e a **dente di sega** richiede infiniti termini per essere sintetizzata. Al livello digitale ciò è chiaramente impossibile, per cui di norma si usano solo i primi termini per approssimare l'onda originale.

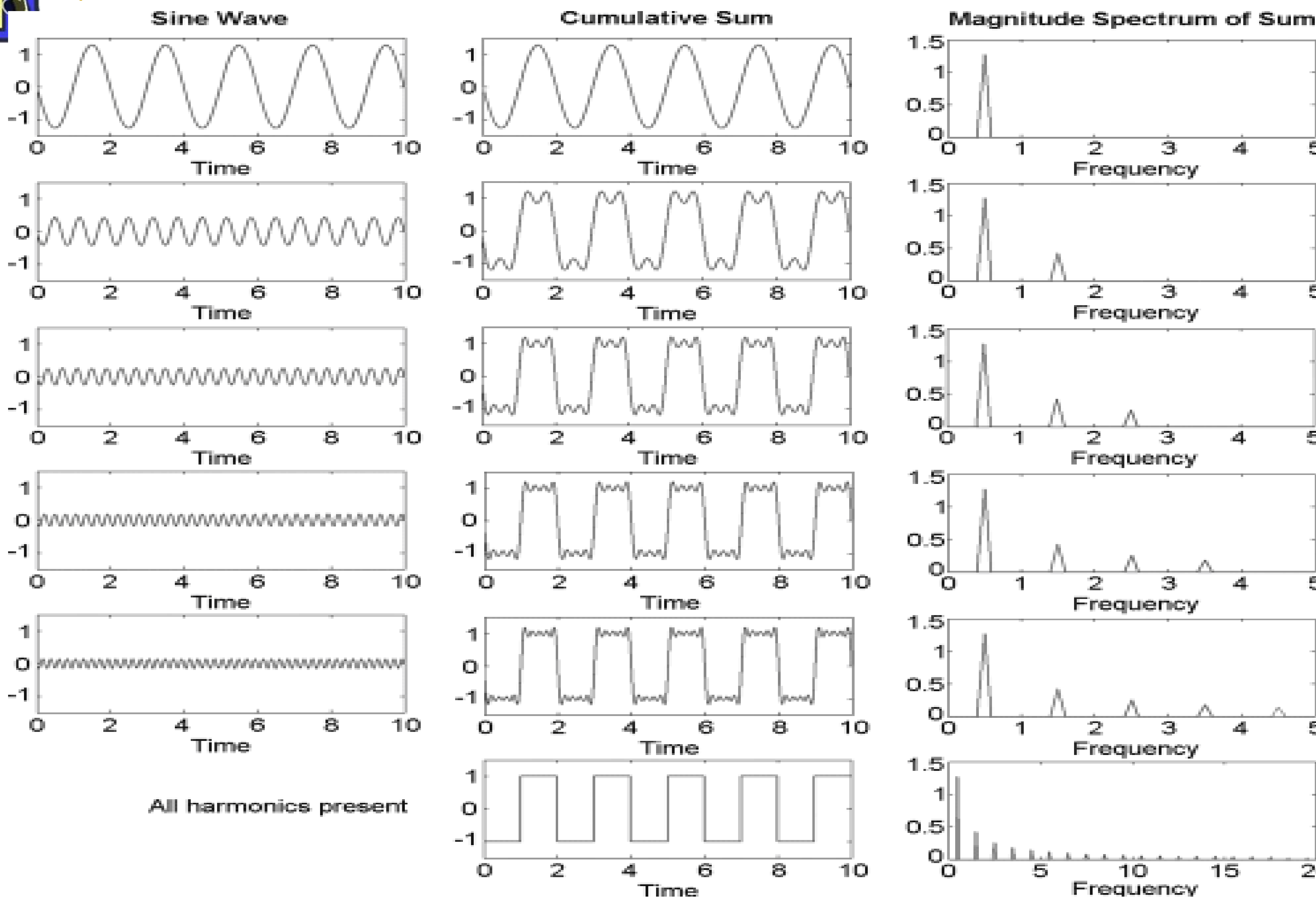
Esempi – Raddrizzata e Quadra





Lo stesso discorso relativo al numero di termini elementari necessari a rappresentare le onde triangolari e a dente di sega, vale per le due onde sopra.

Esempi – Spettro onda quadra



Esercitazione Pratica

- <u>Onde speciali</u>
  In un editor audio creare i seguenti toni:
  - 100 Hz, ampiezza 0.1 – FREQUENZA FONDAMENTALE
  - 200 Hz, ampiezza 0.05
  - 300 Hz, ampiezza 0.033
  - 400 Hz, ampiezza 0.025
  - 500 Hz, ampiezza 0.02
  - Opzionale: 600 Hz, ampiezza 0.016
  - Opzionale: 700 Hz, ampiezza 0.014

L'ampiezza di ogni armonica N è pari all'ampienza dell'armonica fondamentale diviso N

- Mixare solo le tracce dispari (Onda quadra)
- Mixare tutte le tracce (Onda a dente di sega)

Trasformata di Fourier

- Come abbiamo visto, la Serie di Fourier può essere utilizzata solo per onde periodiche.

- In natura moltissime onde sono però **aperiodiche**.

- Per questo motivo, se l’onda è periodica a meno di qualche piccola variazione si usa la Serie al prezzo di un po’ di imprecisione.

- In alternativa si è costretti ad utilizzare la Trasformata di Fourier. Gli spettri ottenuti dalla Trasformata di Fourier per onde generiche, sono ricchi di frequenze che variano in un insieme **continuo** e non discreto (Serie).

Serie e trasformata - Forma esponenziale

Trasformata di Fourier

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(n) e^{i\omega n t} dn \qquad C(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-i\omega n t} dt$$

Serie di Fourier

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\omega n t} \qquad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) e^{-i\omega n t} dt$$

Ponendo $c_{-n} = c_n{}^*$ (* complesso coniugato)

Come si può notare, la Serie di Fourier è un caso particolare della Trasformata. **Nella pratica, per i segnali digitali, si utilizzano la Serie discreta e la Trasformata discreta di Fourier.**

Il suono - Ridefiniamo

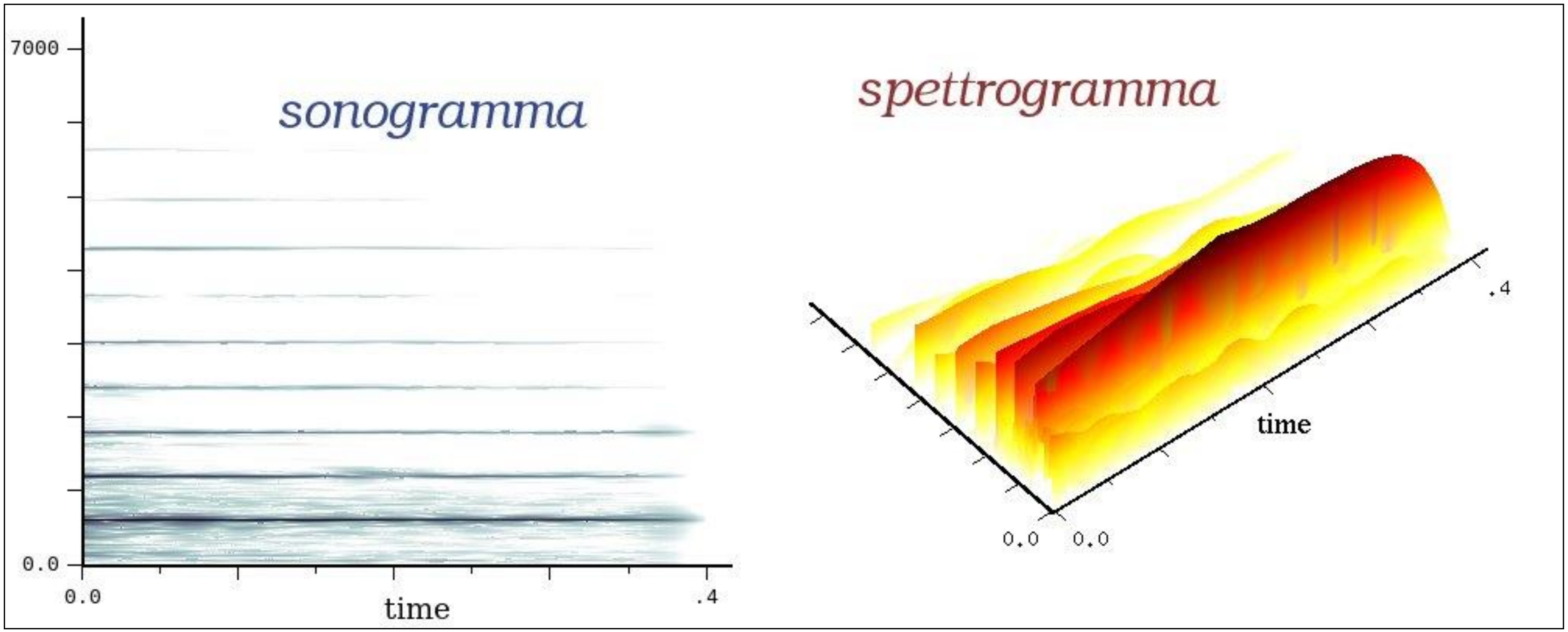
Il **suono** è un insieme[1] di onde meccaniche[2] longitudinali[3].

- [1] Consiste in una somma di più onde sinusoidali a diverse frequenze.
- [2] Onde che si propagano in un mezzo materiale.
- [3] Le particelle del mezzo si muovo in direzione parallela a quella di propagazione.

Riassunto delle definizioni date (dal testo)

- Analisi di Fourier:
  - L'individuazione di segnali semplici che compongono un segnale complesso
- Trasformata di Fourier:
  - Permette di individuare le componenti di frequenza di un segnale
- Serie di Fourier:
  - Caso particolare della Trasformata di Fourier, applicabile nel caso di segnali complessi periodici
- Spettro di Fourier:
  - L'insieme delle componenti di un segnale, con la propria ampiezza e fase
- Sintesi di Fourier:
  - La sintesi di un suono a partire da sinusoidi semplici

Altre rappresentazioni dello spettro



Approfondimenti

- *Accordatura a 432 Hz – Intrighi e ribellioni!* https://www.scienzaeconoscenza.it/blog/consapevolezza-spiritualita/accordatura-a-432-hz
- *Cenni biografici su Joseph Fourier* http://www.dm.unipi.it/mat_dia_med/Fourier.pdf
- *How are harmonics cancelled in symmetrical waveform?* https://www.quora.com/How-are-harmonics-cancelled-in-symmetrical-waveform
- *What is harmonics?* https://electricalnotes.wordpress.com/2011/03/20/harmonics-and-its-effects/